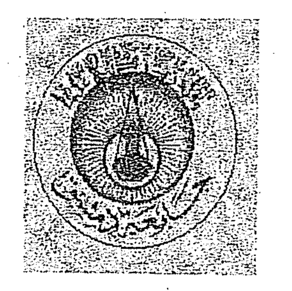
السنة الثانية رياضيات

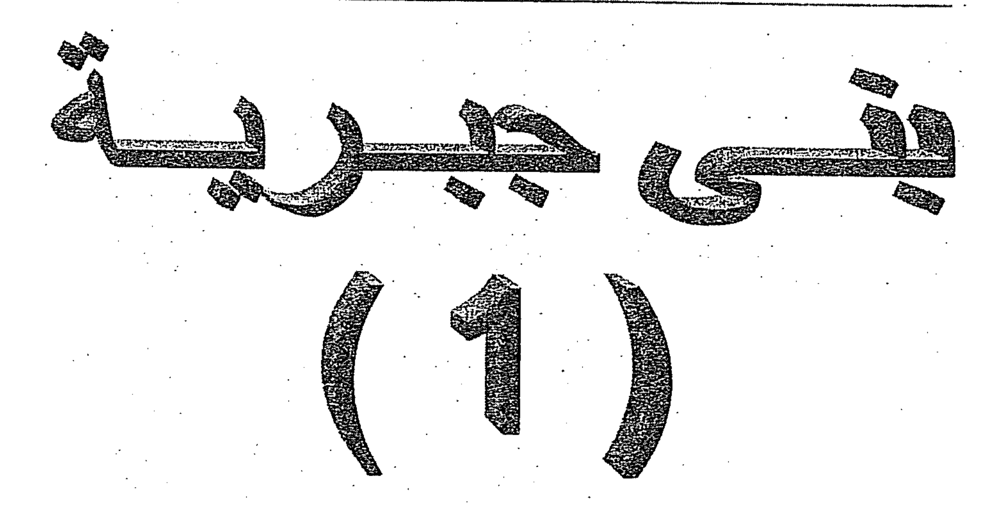
قسم الرياضيات



منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم






الدكتور

حمزة إبراهيم حاكمي

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

١٤٢٥-١٤٢٦هـ

جامعة دمشق :

٢٠٠٥-٢٠٠٦م

# الفهـــــرس

# المقدمة

من أين يبدأ الجبر؟

يمكن القول: إن أسس الجبر تبدأ من حيث بدأت عمليات الجمع و الضرب للأعداد الصحيحة، ومن ثم استبدال الأعداد بالأحرف لإجراء عمليات مشابهة للعمليات الحسابية، من هنا يمكن الحديث عن بدايات الجبر. بعد ذلك بدأت المحاولات للإجابة عن التساؤلات والمسائل التي بدأت تظهر وتواجه الشعوب في تلك الأزمنة.

ولكن الجزء الأصعب من الجواب المرتبط في وصف البنى الجبرية الأساسية في أيامنا هذه مثل الزمرة، الحلقة، المودول، متى بدأت؟

لحسن الحظ أن معظم الموضوعات الجبرية تضمنت مسائل محددة منها ذات طابع نظري وأخرى ذات طابع تطبيقي، وقد كانت الحلول لهذه المسائل سببا لإدخال مفاهيم جديدة، وتطوير الجزء النظري من هذا العلم الذي قدم بدوره حلولاً لمسائل جديدة. وقد أدى هذا التطور في البنى الجبرية إلى تجاوز مفهوم المجموعة المزودة بعمليات جبرية(حسابية) إلى إدخال مفاهيم جديدة مثل الفضاءات الطبولوجية والمعادلات التفاضلية وغيرها. وقد كان هذا التطور سببا في تطور علوم أخرى، وكما قال كبير علماء الميكانيك الكوانتي ديراك: إن الفيزياء الحديثة تتطلب أكثر فأكثر الرياضيات المجردة وتطوير أسسها مثل الهندسة اللاإقليدية والجبر التبادلي. وتستخدم الموضوعات الجبرية في دراسة خواص الجسم الصلب وعلم البلورات.

ويعد كتاب البنى الجبرية (١) مدخلاً إلى الجبر المجرد، فقد وضع لطلبة الرياضيات في السنة الثانية، وخصص لدراسة نظرية الزمر ليقدم للقارئ العربي معظم موضوعات هذه النظرية. ويضم الكتاب خمسة عشر فصلاً كتبت جميعها بلغة علمية بسيطة بحيث اتبعت كل فقرة بتطبيق، وألحق كل فصل بعدد كبير ومتنوع من التمارين المحلولة وغير المحلولة بحيث يمكن اعتبار هذا الكتاب مغطياً لكل من الناحيتين النظرية والعملية على السواء.

يبدأ الكتاب بدراسة المجموعات، فيدرس في الفصل الأول المجموعات والعلاقات الثنائية بما في ذلك علاقات التكافؤ والترتيب وبشيء من التفصيل المجموعات المرتبة جيداً، ثم يدرس بعد ذلك قدرة المجموعة والمجموعات القابلة للعد ولينتهي بدراسة بعض الخواص للأعداد الصحيحة.

وخصص الفصل الثاني لتعريف الزمرة والزمرة الجزئية ودراسة زمرتي الجمع والضرب بالمقاس، ولينتهي هذا الفصل بدراسة المرافقات.

أما الزمرة الدوارة وتطبيقاتها فدرست في الفصل الثالث مع عدد كبير من التمارين والتطبيقات التي توضح أهمية هذا الموضوع.

وخصص الفصل الرابع لدراسة زمرة التباديل وزمر القياسات.

عولج في الفصل الخامس مفهوم الزمرة الناظمية وزمرة الخارج وعلاقة الزمرة بزمرة الخارج لها.

أما التشاكلات الزمرية ومبرهنات التماثل، فقد عولجت في الفصل السادس الذي أتبع بعدد كاف من التمارين المحلولة التي توضح العلاقة الوثيقة بين الزمرة والتشاكلات الزمرية.

وخصص الفصل السابع لدراسة زمرة التماثلات والتماثلات الداخلية وعلاقة هذه التماثلات بالزمرة ذاتها.

كما خصص الفصل الثامن لدراسة المجموع والجداء المباشر للزمر.

أما الزمر التبديلية المنتهية والزمر التبديلية المنتهية التوليد وتمثيلها فقد عولجت في الفصل التاسع وألحقت بعدد كاف من التمارين التي تبين كيفية هذا النشر.

بينما خصص الفصل العاشر لدراسة الـ $p$-زمر ومبرهنات سيلوف.

وخصص الفصل الحادي عشر لتصنيف الزمر المنتهية وقد صنفت فيه معظم الزمر المنتهية وألحق بجدول يبين فيه عدد الزمر التي مراتبها أصغر أو تساوي 100.

أما الفصل الثاني عشر فقد درست فيه الزمر القابلة للحل والزمر عديمة القوى وبشكل مفصل بالإضافة إلى الـ $M$ ـ زمر.



وتضمن الفصل الثالث عشر دراسة وافية للزمر الجزئية الأعظمية والأصغرية بالإضافة إلى الزمر البسيطة والزمر الحرة والثنائية.

بينما خصص الفصل الرابع عشر لدراسة المتتاليات التامة وتمديدات الزمر وبشكل خاص التمديدات المنشطرة.

وأخيراً، فقد خصص الفصل الخامس عشر لدراسة الفئات والدوال.

ونلفت الانتباه إلى أنه يجب قراءة الصيغ المكتوبة بالأحرف الأجنبية من اليسار إلى اليمين.

هذا واني آمل أن يؤدي هذا الكتاب الفائدة المرجوة منه وهي:

- أن يحصل الطالب على أساس قوي في هذا الموضوع حيث توجد الكثير من الكتب التي تعالج هذه الموضوعات ولكن أريد من الطالب أكثر من ذلك أريد منه أن يشاركني وجهة نظري في أن الجبر المجرد يعد مادة معاصرة حيث إن مفاهيمها كما ذكرنا سابقا تستخدم كثيرا في الفيزياء والكيمياء وعلوم الحاسوب بالإضافة إلى الرياضيات.
- كما أريد من القارئ أن يستمتع بقراءة هذا الكتاب، حيث إن الطالب يفترض أن كتب الرياضيات من حيث طبيعة المادة هي كتب نظرية بحتة، ولا تمت إلى الواقع بصلة، وقد بذلت جهدي لتغير هذه النظرة في هذا الكتاب.

وفي النهاية لابدّ من شكر الأستاذ الدكتور عبد الواحد أبو حمدة الذي رافقني في رحلة إعداد هذا الكتاب، ولم يبخل في تزويدي بالملاحظات والإرشادات في طريقة عرض الموضوعات التي وردت ضمن هذا الكتاب.

**والله ولي التوفيق**

المؤلف
د.حمزة حاكمي

دمشق
أيار ٢٠٠٤

# الفصل الأول

# نظرية المجموعات

**مقدمة.**

تعد المجموعة واحدة من أهم المفاهيم في نظرية المجموعات، و قد أدى استخدام مفهوم المجموعة من دون أي تحديد إلى ظهور بعض النتائج المتناقضة، وقد حاول كثير من العلماء وضع أسس لنظرية المجموعات لأجل التخلص من هذه التناقضات. ويعد العالم الألماني $(G.Cantor 1845-1918)$ أحد هؤلاء الذين ساهموا في وضع هذه الأسس واليه يعود ما يمكن قوله بتعريف المجموعة ( إذا صح التعبير ):

**تعريف.**

المجموعة هي جملة أشياء تشترك بخاصة معينة أو تجمعها صفة مشتركة، وتتعين المجموعة بمعرفة الأشياء التي تتكون منها والتي تسمى بعناصر المجموعة. نرمز للمجموعة بأحرف كبيرة $A,B,C,\cdots$ ولعناصرها بأحرف صغيرة. فعندما نقول $x$ عنصر من المجموعة $A$ نكتب ذلك باختصار $x\in A$ وفي الحالة المعاكسة نكتب $x\notin A$. نقول عن المجموعة $A$ إنها مجموعة جزئية من المجموعة $B$ إذا كان كل عنصر من $A$ هو عنصر من $B$ ونعبر عن ذلك $A\subseteq B$. نقول عن المجموعتين $A,B$ إنهما متساويتان إذا كان $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ ونكتب $A=B$. جماعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة $A$ نرمز لها $P(A)$. المجموعة التي لا تحوي أي عنصر نرمز لها $\Phi$ وتسمى المجموعة الخالية. بالاعتماد على الرموز السابقة نجد أنه أيا كانت المجموعة $A$ فان $\Phi\subseteq A$. كذلك أيا كانت المجموعات $A,B,C$ والتي من أجلها $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ فإن $A\subseteq C$. من أجل أي مجموعتين اختياريتين $A,B$ نعرف التقاطع $A\cap B$ والاجتماع $A\cup B$ بالشكل

$$A\cap B=\{x:x\in A\wedge x\in B\},\qquad A\cup B=\{x:x\in A\vee x\in B\}.$$

من أجل أي مجموعتين $A,B$ ، القضايا التالية متكافئة:

١ - $A \subseteq B$ .   ٢ - $A\cap B = A$ .   ٣ - $A\cup B = B$ .

أيا كانت المجموعتين $A,B$ ، نسمي المجموعة الجزئية $A\setminus B=\{x: x\in A \wedge x\notin B\}$ متممة المجموعة $B$ في $A$ . القضايا التالية صحيحة أيا كانت المجموعات $A,B,C$:

١- خاصة اللانمو: $A\cap A = A,\quad A\cup A = A$ .

٢- الخاصة التبديلية: $A\cap B = B\cap A,\quad A\cup B = B\cup A$ .

٣- الخاصة التجميعية:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

٤- الخاصة التوزيعية:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

٥- $A\cup(A\cap B)=A,\quad A\cap(A\cup B)=A$ .

٦- $A\cup\phi=A,\quad A\cap\phi=\phi$ .

٧- $A\cup B=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$

$A\cap B=(A\cup B)\setminus((A\setminus B)\cup(B\setminus A))$ .

٨- $A\setminus B = A\setminus(A\cap B)$ .

٩- $A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$ .

١٠- $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$ .

نسمي المجموعة $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ الفرق التناظري للمجموعتين $A,B$ .

يتمتع الفرق التناظري للمجموعات $A,B,C$ بالخواص التالية:

١- $A\Delta B=B\Delta A$ .

٢- $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$ .

٣- $A\Delta\phi=A$ .

٤- $A\Delta A=\phi$ .

٥- $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$ .



إن الاجتماع و التقاطع يعرف كل منهما لأجل أي جماعة من المجموعات، فإذا كانت $\{A_i : i\in I\}$ جماعة من المجموعات الجزئية $A_i$ لمجموعة ما، حيث الدليل $i$ يمسح المجموعة $I$ ( دون استثناء الحالة $A_i = Aj$ من أجل $i\neq j$ )، عندئذ نعرف التقاطع $\cap\{A_i : i\in I\}$ والاجتماع $\cup\{A_i : i\in I\}$ بالشكل

$$\cap\{A_i : i\in I\}=\{x: x\in A_i, \forall i\in I\}$$

$\cup\{A_i : i\in I\}=\{x: x\in A_i, i\in I$ لأجل أحد الأدلة $\}$ .

نرمز للتقاطع والاجتماع السابقين $\bigcap_{i\in I}A_i$ و $\bigcup_{i\in I}A_i$ على الترتيب. إذا كانت $I=\{1,2,\dots,n\}$ نعبر عن التقاطع و الاجتماع السابقين على الترتيب بالشكل:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n ،\quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n .$$

أيا كانت المجموعتين $A,B$ نسمي المجموعة $A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}$ الجداء الديكارتي للمجموعتين $A,B$ . يتمتع الجداء الديكارتي بالخواص التالية:

١ - $A\times(B\cup D)=(A\times B)\cup(A\times D)$ ، $(A\cup B)\times D=(A\times D)\cup(B\times D)$ .

٢ - $A\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(A\times D)$ ، $(A\cap B)\times D=(A\times D)\cap(B\times D)$ .

٣ - $A\times(B\setminus D)=(A\times B)\setminus(A\times D)$ ، $(A\setminus B)\times D=(A\times D)\setminus(B\times D)$ .

وذلك أيا كانت المجوعات $A,B,D$ .

أخيرا، سوف نورد فيما يلي الرموز التي سنستخدمها لمجموعات الأعداد :

$N=\{0,1,2,3,\cdots\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية. $N^*=N\setminus\{0\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر. $Z$ مجموعة الأعداد الصحيحة. $Q$ مجموعة الأعداد العادية. $R$ مجموعة الأعداد الحقيقية.

المحاضرة الثانية :

## ١-١. العلاقات الثنائية.

**تعريف.**

لتكن $P$ مجموعة غير خالية. نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $P\times P$ علاقة ثنائية على المجموعة $P$ أو علاقة على $P$. إذا كانت $\rho$ علاقة على المجموعة $P$ وكان $(a,b)\in\rho$ فإننا نقول إن العنصر $b$ يرتبط بالعنصر $a$ وفق العلاقة $\rho$ ونكتب $a\rho b$ أي أنه $\forall a,b\in P$ فإن:

$$(a,b)\in\rho \Leftrightarrow a\rho b$$

يمكن تعريف أكثر من علاقة على المجموعة الواحدة.

إذا كانت $\rho=\{(a,a);\forall a\in P\}$ نسمي العلاقة $\rho$ في هذه الحالة علاقة قطرية.

إذا كانت $\rho=P\times P$ نقول عن العلاقة $\rho$ إنها واحدية.

- نقول عن العلاقة $\rho$ إنها انعكاسية إذا تحقق الشرط: $\forall a\in P; a\rho a$ .
- نقول عن العلاقة $\rho$ إنها تناظرية إذا تحقق الشرط: $\forall a,b\in P; a\rho b\Rightarrow b\rho a$.
- نقول عن العلاقة $\rho$ إنها متعدية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a,b,c\in P; a\rho b\wedge b\rho c\Rightarrow a\rho c.$$

- نقول عن العلاقة $\rho$ إنها تخالفية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a,b\in P; a\rho b\wedge b\rho a\Rightarrow a=b.$$

توجد في الرياضيات أشياء كثيرة تكون مختلفة بحسب مفهوم ما و متطابقة أو متكافئة بحسب مفهوم أخر. فعلى سبيل المثال، $4+4$ و $2+1$ هما مقداران مختلفان حتما بالنسبة إلى عملية الجمع العادية المعرفة على الأعداد، بينما باقي قسمة $4+4$ على $5$ يساوي باقي قسمة $2+1$ على $5$. أي أن المقدارين $4+4$ و $2+1$ متطابقان أو متكافئان إذا كانت عملية الجمع هي باقي القسمة على $5$. لهذا السبب نحن بحاجة إلى تقنية جديدة لدراسة هذه المفاهيم وهذه التقنية سوف ندعوها علاقة التكافؤ التي نوردها من خلال التعريف التالي:



**تعريف.**

لتكن $\rho$ علاقة على المجموعة $P$، نقول عن $\rho$ أنها علاقة تكافؤ على $P$ إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

إذا كانت $\rho$ علاقة تكافؤ على المجموعة $P$، نسمي المجموعة

$$\bar{a}=\{x:x\in P; a\rho x\}$$

حيث $a\in P$ صف تكافؤ العنصر $a$. ونسمي العنصر $a$ ممثلا لهذا الصف. كذلك نسمي مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $\rho$ بمجموعة الخارج ونرمز لها $P/\rho$، أي $P/\rho=\{\bar{a}:a\in P\}$.

العلاقة بين صفوف التكافؤ نوردها من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ١-١-١.**

لتكن $\rho$ علاقة على المجموعة $P$ و $a,b\in P$. عندئذ $b\in\bar{a}$ عندما وفقط عندما $\bar{a}=\bar{b}$.

(كتناظرية)

**البرهان.**

لزوم الشرط. لنفرض أن $b\in\bar{a}$. ليكن $x\in\bar{a}$ عندئذ $a\rho x$ وبما أن $a\rho b$ فإن $b\rho a$ ولكون العلاقة $\rho$ متعدية نستنتج أن $b\rho x$ وهذا يبين لنا أن $x\in\bar{b}$ أي أن $\bar{a}\subseteq\bar{b}$. ليكن $y\in\bar{b}$ عندئذ $b\rho y$ وبما أن $b\in\bar{a}$ فإن $a\rho b$ ولكون العلاقة $\rho$ متعدية نجد أن $a\rho y$ أي أن $y\in\bar{a}$ ومنه $\bar{b}\subseteq\bar{a}$. مما سبق نجد أن $\bar{a}=\bar{b}$.

كفاية الشرط. لدينا $b\in\bar{b}=\bar{a}$ وذلك لكون العلاقة $\rho$ انعكاسية. ٥

مفهوم آخر من المفاهيم الهامة في الرياضيات نورده من خلال التعريف التالي:

**تعريف.**

لتكن $\sum=\{A_i:i\in I\}$ أسرة من المجموعات الجزئية من المجموعة غير الخالية $P$. نقول عن $\sum$ أنها تشكل تجزئة للمجموعة $P$ إذا تحقق ما يلي:

١- أيا كان $i\in I$ فإن $A_i\neq\Phi$.

٢- أيا كان $i,j\in I$ إما $A_i=A_j$ أو $A_i\cap A_j=\Phi$.

٣- $P=\bigcup_{i\in I}A_i$ .

المبرهنة التالية تبين لنا كيفية الحصول على تجزئة من خلال علاقة التكافؤ:

**مبرهنة ١-١-٢.**

لتكن $\rho$ علاقة تكافؤ على المجموعة $P$ . إن مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $\rho$ تشكل تجزئة للمجموعة $P$ .

**البرهان.**

لتكن $P/\rho=\{\bar{a}:\ a\in P\}$ مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $\rho$، بما أن العلاقة $\rho$ انعكاسية فإن $a\rho a$ وذلك أيا كان $a\in P$ ومنه $a\in\bar{a}$، أي أن $\bar{a}\neq\Phi$ وذلك أيا كان $\bar{a}\in P/\rho$ . ليكن $\bar{a},\bar{b}\in P/\rho$ إذا كان $\bar{a}\cap\bar{b}=\Phi$ يتم المطلوب. لنفرض أن $\bar{a}\cap\bar{b}\neq\Phi$ عندئذ يوجد $x\in\bar{a}\cap\bar{b}$ وحسب التمهيدية (١-١-١) فإن $\bar{x}=\bar{a}$ و $\bar{x}=\bar{b}$ ومنه $\bar{a}=\bar{b}$ . واضح أن $P=\bigcup_{i\in I}A_i$ . مما سبق نجد أن المجموعة $P/\rho$ تشكل تجزئة للمجموعة $P$ . ₀

العلاقة بين التجزئة وعلاقة التكافؤ نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١-١-٣.**

إذا كانت $\Sigma$ تجزئة للمجموعة $P$ فإن العلاقة $\rho$ المعرفة على $P$ بالشكل التالي:

$$\forall a,b\in P;\quad a\rho b\Leftrightarrow\exists A\in\Sigma;\quad a,b\in A$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة $P$ وأن صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي و فقط هي عناصر التجزئة $\Sigma$ . أي أن $P/\rho=\Sigma$ .

**البرهان.**

واضح أن العلاقة $\rho$ انعكاسية و تناظرية، لنبرهن على أنها متعدية. ليكن $a,b,c\in P$ بحيث $a\rho b$ و $b\rho c$ . بما أن $a\rho b$ فإنه يوجد $A\in\Sigma$ بحيث $a,b\in A$ . كذلك بما أن $b\rho c$ فإنه يوجد $B\in\Sigma$ بحيث $b,c\in B$ . مما سبق نجد أن $b\in A\cap B$ أي أن $A\cap B\neq\Phi$ ولكون $\Sigma$ تجزئة للمجموعة $P$ نستنتج أن $A=B$ ومنه $a,c\in A$ أي أن $a\rho c$ وهكذا نجد أن العلاقة $\rho$ متعدية. لنبرهن الآن أن $P/\rho=\Sigma$ . ليكن



$\bar{a}\in P/\rho$ حيث $a\in P$، بما أن $a\in P=\bigcup_{B_i\in\Sigma}B_i$ فإنه يوجد $B_{i_0}\in\Sigma$ بحيث $a\in B_{i_0}$، لنبرهن أن $\bar{a}=B_{i_0}$ . ليكن $x\in B_{i_0}$ عندئذ $a,x\in B_{i_0}$ ومنه $a\rho x$ أي أن $x\in\bar{a}$ وبالتالي $B_{i_0}\subseteq\bar{a}$ . ليكن $y\in\bar{a}$ عندئذ $a\rho y$ ومنه يوجد $B_{j_0}\in\Sigma$ بحيث $a,y\in B_{j_0}$ وهكذا فإن $a\in B_{i_0}\cap B_{j_0}$ وبالتالي $B_{i_0}=B_{j_0}$ أي أن $y\in B_{i_0}$ وهذا يبين لنا أن $\bar{a}\subseteq B_{i_0}$ . مما سبق نجد أن $\bar{a}=B_{i_0}$ أي أن $P/\rho\subseteq\Sigma$ . لنبرهن الآن الاحتواء المعاكس، ليكن $B\in\Sigma$ عندئذ $B\neq\Phi$ ومنه يوجد $a\in B$ . من جهة أخرى، لدينا $a\in\bar{a}$ .لنبرهن أن $B=\bar{a}$ . ليكن $x\in\bar{a}$ عندئذ $a\rho x$ وبالتالي يوجد $A\in\Sigma$ بحيث $a,x\in A$ وهذا يعني أن $a\in A\cap B$ أي أن $A=B$ ومنه $x\in A$ وهذا يبين لنا أن $\bar{a}\subseteq B$ . ليكن $y\in B$ عندئذ $a,y\in B$ أي أن $a\rho y$ وبالتالي $y\in\bar{a}$ وهكذا نجد أن $B\subseteq\bar{a}$ . مما سبق نجد أن $B=\bar{a}$ . وهذا يبين لنا أن $\Sigma\subseteq P/\rho$ وبالتالي $\Sigma=P/\rho$ . ₀

**ملاحظة:**

لتكن $\Sigma$ تجزئة للمجموعة $P$، وجدنا حسب المبرهنة(١-١-٣) أن التجزئة $\Sigma$ تولد علاقة تكافؤ على المجموعة $P$ . سوف نرمز لعلاقة التكافؤ هذه بالرمز $\rho_\Sigma$ .

**مبرهنة ١-١-٤.**

لتكن $\Sigma,\Theta$ تجزئتين للمجموعة $P$ . ولنفرض أن $\rho_\Sigma,\rho_\Theta$ علاقتي التكافؤ المولدتين من خلال $\Sigma,\Theta$ على الترتيب. عندئذ $\Sigma=\Theta$ عندما وفقط عندما $\rho_\Sigma=\rho_\Theta$ .

**البرهان.**

لزوم الشرط: لنفرض أن $\Sigma=\Theta$ . وليكن $(a,b)\in\rho_\Theta$ وحسب المبرهنة(١-١-٣) يوجد $A\in\Theta$ بحيث $a,b\in A$ وحسب الفرض فإن $A\in\Sigma$ أي أن $(a,b)\in\rho_\Sigma$ وهذا يبين لنا أن $\rho_\Theta\subseteq\rho_\Sigma$ . بشكل مشابه نبرهن على الاحتواء المعاكس، مما سبق نجد أن $\rho_\Sigma=\rho_\Theta$ .

كفاية الشرط: ينتج من المبرهنة (١-١-٣) وذلك لأنه إذا كان $\rho_\Sigma=\rho_\Theta$ عندئذ يكون $P/\rho_\Sigma=P/\rho_\Theta$ وبالتالي فإن $\Sigma=\Theta$ . ₀

و جدنا سابقا أن كل علاقة تكافؤ على مجموعة ما تولد تجزئة لهذه المجموعة، وكذلك كل تجزئة لهذه المجموعة تولد علاقة تكافؤ. وبالتالي يمكن أن توجد على المجموعة الواحدة أكثر من علاقة تكافؤ وأكثر من تجزئة. المبرهنة التالية تبين لنا مدى الارتباط بين علاقات التكافؤ على مجموعة ما وتجزئات هذه المجموعة. لأجل ذلك لنفرض أن $\Im$ هي مجموعة التجزئات لمجموعة ما $P$ و $\Im_0$ مجموعة علاقات التكافؤ على هذه المجموعة.

**مبرهنة ١-١-٥.**

يوجد تطبيق متباين وغامر(تقابل) بين $\Im$ و $\Im_0$.

**البرهان.**

لنعرف التطبيق $f:\Im\to\Im_0$ بالشكل $f(\Sigma)=\rho_\Sigma$ حيث $\rho_\Sigma$ هي علاقة التكافؤ على المجموعة $P$ المولدة بالتجزئة $\Sigma$. إن التطبيق $f$ متباين لأنه أيا كانت $\Sigma,\Theta\in\Im$ بحيث $f(\Sigma)=f(\Theta)$ فإن $\rho_\Sigma=\rho_\Theta$ وحسب المبرهنة(١-١-٤) ينتج أن $\Theta=\Sigma$. كذلك $f$ غامر لأنه إذا كانت $\rho\in\Im_0$ فإنه حسب المبرهنة(١-١-٢) المجموعة $Pl\rho$ تشكل تجزئة للمجموعة $P$ وبالتالي $Pl\rho\in\Im$ وحسب المبرهنة(١-١-٣) فإن $f(Pl\rho)=\rho$. ₀

علاقة أخرى من العلاقات الهامة على المجموعات نوردها من خلال التعريف التالي:

**تعريف.**

لتكن $\rho$ علاقة على المجموعة $P$. نقول عن العلاقة $\rho$ إنها علاقة ترتيب جزئية على المجموعة $P$ إذا كانت العلاقة $\rho$ انعكاسية، تخالفية ومتعدية. يرمز عادة لعلاقة الترتيب الجزئية بالرمز $\le$. نسمي الثنائية $(P,\le)$ مجموعة مرتبة جزئيا.

لنلق الضوء على واحدة من العلاقات التي من خلالها يمكننا الحصول على علاقتي تكافؤ وترتيب في آن واحد وذلك من خلال المبرهنة التالية:



**مبرهنة ١-١-٦.**

لتكن $\le$ علاقة انعكاسية ومتعدية على المجموعة $P$. عندئذ:

١- العلاقة $\rho$ المعرفة على $P$ بالشكل التالي:

$$\forall a,b\in P \qquad a\rho b \Leftrightarrow a\le b\wedge b\le a$$

هي علاقة تكافؤ على $P$.

٢- العلاقة $\le$ المعرفة على المجموعة $Pl\rho$ بالشكل التالي:

$$\forall \bar{a},\bar{b}\in Pl\rho \qquad \bar{a}\le\bar{b}\Leftrightarrow a\le b$$

هي علاقة ترتيب جزئية على $Pl\rho$.

**البرهان.**

١- البرهان على أن العلاقة $\rho$ هي علاقة تكافؤ على $P$ نتركه للقارئ.

٢- للبرهان على أن العلاقة $\le$ هي علاقة ترتيب جزئية على المجموعة $Pl\rho$ لابد لنا في البداية البرهان على أن العلاقة $\le$ معرفة جيدا على المجموعة $Pl\rho$. ليكن $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}\in Pl\rho$ بحيث $\bar{a}=\bar{c}$ و $\bar{b}=\bar{d}$ ولنفرض أنه إذا كان $\bar{a}\le\bar{b}$ فإن $\bar{c}\le\bar{d}$. لنفرض أن $\bar{a}\le\bar{b}$ عندئذ $a\le b$ وبما أن $c\in\bar{c}=\bar{a}$ فإن $a\rho c$ ومنه $a\le c$ و $c\le a$. كذلك بما أن $d\in\bar{d}=\bar{b}$ فإن $b\rho d$ وبالتالي $d\le b$ و $b\le d$. مما سبق نستنتج أن $c\le a\le b\le d$ أي أن $c\le d$ ومنه $\bar{c}\le\bar{d}$. واضح أن ( $\le$ ) هي علاقة انعكاسية ومتعدية على المجموعة $Pl\rho$.

لنبرهن على أنها تخالفية. ليكن $\bar{a},\bar{b}\in Pl\rho$ بحيث $\bar{a}\le\bar{b}$ و $\bar{b}\le\bar{a}$ عندئذ $a\le b\le a$ وبالتالي $a\rho b$ أي أن $b\in\bar{a}$ ومنه $\bar{a}=\bar{b}$. ₀

نأتي الآن لدراسة خواص بعض العناصر في المجموعات المرتبة جزئياً.

**تعريف.**

لتكن $(P,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

- نقول عن العنصر $a\in P$ إنه عنصر أصغر في $P$ إذا حقق الشرط: $\forall x\in P$ فإن $a\le x$.

- نقول عن العنصر $b \in P$ إنه عنصر أكبر في $P$ إذا حقق الشرط:
$\forall y \in P$ فإن $y \le b$.
- نقول عن العنصر $d \in P$ إنه عنصر أصغري في $P$ إذا حقق الشرط:
$\forall z \in P$ بحيث $z \le d$ ينتج أن $z = d$.
- نقول عن العنصر $c \in P$ إنه عنصر أعظمي في $P$ إذا حقق الشرط:
$\forall u \in P$ بحيث $c \le u$ ينتج أن $c = u$.

لابد أن نذكر هنا أن العناصر الواردة في التعريف السابق ليس بالضرورة أن تكون موجودة في أي مجموعة مرتبة جزئياً. فعلى سبيل المثال مجموعة الأعداد الصحيحة هي مجموعة مرتبة جزئياً بالنسبة إلى العلاقة $\le$ المعرفة على الأعداد ولا تحوي أيا من العناصر الواردة في التعريف السابق. بينما مجموعة الأعداد الطبيعية $N$ وهي مجموعة مرتبة جزئياً تحوي عنصراً أصغر هو الصفر وتحوي أيضا عنصراً أصغرياً هو الصفر بينما لا تحوي عنصراً أكبر ولا تحوي عنصراً أعظمياً.

العلاقة بين العنصر الأصغر (الأكبر) والعنصر الأصغري (الأعظمي) نوردها من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ١-١-٧.**

لتكن $(P,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً.عندئذ:

١ - العنصر الأصغر(الأكبر) في $P$ يكون وحيدا في حال وجوده.

٢ - كل عنصر أصغر (أكبر) في $P$ (في حال وجوده) يكون عنصرًا أصغرياً (أعظمياً) في $P$.

**البرهـان.**

نتركه للقارئ.

كثيرًا ما نستخدم وبشكل واسع مبدأ الاستقراء الرياضي الذي سنورده في المبرهنة التالية مع بعض الشروط المكافئة له:



**مبرهنـة ١-١-٨.**

لتكن $(P,\le)$ مجموعة مرتبة جزئيا. الشروط التالية متكافئة:

١ - **الشرط الأصغري.** أي مجموعة جزئية وغير خالية من $P$ تحوي عنصراً أصغرياً.

٢ - **مبدأ الاستقراء.** إذا كانت جميع العناصر الأصغرية في المجموعة $P$ تتمتع بخاصة ما $\Theta$ وإذا كان تمتع جميع العناصر $x \in P$ المحققة للشرط $x < a$ يؤدي إلى تمتع العنصر $a \in P$ بالخاصة $\Theta$ فإن جميع عناصر المجموعة $P$ تتمتع بالخاصة $\Theta$.

٣ - **شرط انقطاع السلاسل المتناقصة.** أي سلسلة متناقصة

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots$$

من عناصر المجموعة $P$ تنقطع. بمعنى يوجد دليل $n$ من أجله $a_n = a_k$ وذلك أيا كان $k \ge n$. بمعنى آخر $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} \cdots$.

**البرهـان.**(١)⇐(٢).

لنفرض أن $M$ هي مجموعة العناصر من $P$ التي لا تحقق الخاصة $\Theta$. وهنا نميز حالتين: - الحالة الأولى: إذا كانت $M = \Phi$ يتم المطلوب. - الحالة الثانية: لنفرض أن $M \ne \Phi$ وحسب الفرض فإن $M$ تحوي عنصرًا أصغرياً وليكن $a_0$. إن $a_0$ ليس عنصرًا أصغرياً في $P$ لأنه لا يتمتع بالخاصة $\Theta$ وبالتالي توجد عناصر $x \in P$ بحيث $x < a_0$ أي أن $x \notin M$ وحسب تعريف $M$ فإن $x$ يتمتع بالخاصة $\Theta$ وهذا يؤدي إلى تمتع العنصر $a_0$ بالخاصة $\Theta$ وهذا يناقض كون $a_0 \in M$. مما سبق نجد أن $M = \Phi$ وبالتالي جميع عناصر المجموعة $P$ تتمتع بالخاصة $\Theta$.

(٢)⇐(٣). لنبن على المجموعة $P$ خاصة $\Theta_0$ معرفة بالشكل التالي: سوف نقول عن العنصر $b \in P$ إنه يحقق الخاصة $\Theta_0$ عندما وفقط عندما أي سلسلة متناقصة من عناصر $P$ تبدأ بالعنصر $b$ تنقطع. ومنه نجد أن جميع العناصر الأصغرية في $P$ تحقق الخاصة $\Theta_0$. ليكن $a \in P$ ولنفرض أن جميع العناصر $x < a$ تتمتع بالخاصة $\Theta_0$ ولنأخذ السلسلة المتناقصة

$$a = a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \qquad (*)$$

إذا كانت المساواة في السلسلة السابقة محققة في كل مكان فإن السلسلة (*) تنقطع.
لنفرض أن $i$ أول دليل في السلسلة (*) المساواة عنده غير محققة أي أن

$$a = a_1 = a_2 = \cdots = a_{i-1} > a_i \geq a_{i+1} \geq \cdots$$

وبما أن $a_i < a$ فإن السلسلة $a_i \geq a_{i+1} \geq a_{i+2} \geq \cdots$ حسب الفرض تنقطع وبالتالي السلسلة (*)، تنقطع وهذا يبين لنا أن العنصر $a$ يتمتع بالخاصة $\Theta_0$. وحسب الفرض فإن جميع عناصر المجموعة $P$ تحقق الخاصة $\Theta_0$. وبالتالي المجموعة $P$ تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة.

(٣)$\Leftarrow$(١). لنفرض أنه توجد في $P$ مجموعة جزئية $M$ غير خالية لا تحوي عنصراً أصغرياً. وليكن $a_1 \in M$ وبما أن $a_1$ ليس أصغرياً في $M$ فإنه يوجد $a_2 \in M$ بحيث $a_1 > a_2$. لنفرض أنه تم الحصول على العناصر $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$ من عناصر $M$. وبما أن العنصر $a_n$ ليس أصغرياً في $M$ فإنه يوجد $a_{n+1} \in M$ بحيث $a_n > a_{n+1}$. وهكذا نجد أننا حصلنا على السلسلة المتناقصة

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$$

والتي لا تحقق الشرط (٣) مما يناقض الفرض. وهذا يبين لنا أن كل مجموعة جزئية وغير خالية من $P$ تحوي عنصراً أصغرياً. ∘

نأتي الآن لإثبات أن مجموعة الأعداد الطبيعية تحقق الشرط الأصغري، وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١-١-٩.**

يوجد في كل مجموعة جزئية وغير خالية من $N$ عنصر أصغر.

**البرهان.**

لتكن $A$ مجموعة جزئية وغير خالية من $N$. إذا كان $o \in A$ أو $A = N$ فإن $A$ تحوي عنصراً أصغراً وهو الصفر. لنفرض أن $A \subseteq N$ وأن $o \notin A$. ولنأخذ المجموعة

$$S = \{x : x \in N, \quad x \leq a \quad \forall a \in A\}$$



فنجد أن $o \in S$. كما أن $S \neq N$ لأنه إذا كانت $S = N$ فإن $A \subset S$. ليكن $b \in A$ عندئذ $b+1 \in S$ وحسب تعريف المجموعة $S$ فإن $b+1 \leq b$ وهذا غير ممكن. وهذا يبين لنا أن $S \neq N$ وبالتالي يوجد $k \in S$ بحيث $k+1 \notin S$ ومنه $k \leq a$ وذلك أياً كان $a \in A$. لنبرهن على أن $k \in A$. لنفرض جدلاً أن $k \notin A$ عندئذ أياً كان $a \in A$ فإن $k < a$. ليكن $a_0 \in A$ عندئذ $k < a_0$. لنفرض أن $m = a_o - k$ فنجد أن $a_0 = m + k$ وبفرض أن $t = m - 1$ يكون

$$a_0 = t + (k+1)$$

أي أن $k+1 \leq a_0$. وهذا يبين لنا أنه أياً كان $a \in A$ فإن $k+1 \leq a$ وبالتالي $k+1 \in S$ مما يناقض اختيار العنصر $k$ بحيث $k+1 \notin S$. مما سبق نستنتج أن $k \in A$ و أن $k$ عنصر أصغر في $A$. ∘

من التمهيدية (١-١-٧) والمبرهنة (١-١-٩) نستنتج أن مجموعة الأعداد الطبيعية تحقق الشرط الأصغري. بينما مجموعة الأعداد الصحيحة $Z$ لا تحقق الشرط الأصغري بالنسبة إلى علاقة الترتيب المألوفة المعرفة على الأعداد الصحيحة، لأنها لا تملك عنصراً أصغراً. ولكن إذا عرفنا على $Z$ علاقة ترتيب جزئية جديدة بالشكل

$$o < 1 < 2 < 3 < \cdots < -1 < -2 < -3 < \cdots$$

فإن $Z$ تصبح في هذه الحالة محققة للشرط الأصغري.

**تعريف.**

لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و $a,b \in P$. نقول عن العنصرين $a,b$ إنهما متقارنين إذا تحقق الشرط: إما $a \leq b$ أو $b \leq a$. ونقول عن المجموعة المرتبة جزئياً إنها مرتبة كلياً إذا كان كل عنصرين فيها متقارنين.

**تمهيدية ١-١-١٠.**

لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة كلياً. إن مفهومي العنصر الأصغر (الأكبر) والعنصر الأصغري (الأعظمي) يتطابقان.

**البرهان.**

نتركه تمريناً للقارئ. ٥

**تعريف.**

لتكن $(P,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً و $A$ مجموعة جزئية وغير خالية من $P$.

– نقول عن العنصر $a\in P$ أنه حداً أعلى للمجموعة $A$ إذا حقق الشرط: $\forall x\in A$ فإن $a\ge x$.

– نقول عن العنصر $a\in P$ أنه حداً أدنى للمجموعة $A$ إذا حقق الشرط: $\forall y\in A$ فإن $y\ge a$.

نأتي الآن إلى صياغة تمهيدية زورن والتي تعتبر واحدة من موضوعات نظرية المجموعات وهي تشكل أحد الأدوات الرياضية الفعالة عند التعامل مع المجموعات غير المنتهية.

**تمهيدية زورن.**

لتكن $(P,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً. إذا كانت كل مجموعة جزئية من $P$ وغير خالية ومرتبة كلياً تملك حداً أعلى (أدنى) واحداً على الأقل عندئذ يوجد في $P$ عنصراً أعظمياً (أصغرياً) واحداً على الأقل.

إن تمهيدية زورن تكافئ نصاً آخر يسمى موضوعة الاختيار والتي تنص على ما يلي:

**موضوعة الاختيار.**

إذا كانت $A$ مجموعة ما غير خالية عندئذ يوجد تطبيق $f:S(A)-\Phi\to A$ يحقق $f(B)\in B$ وذلك أياً كان $\Phi\ne B\in S(A)$. حيث $S(A)$ هي مجموعة الأجزاء للمجموعة $A$.

بالعودة إلى تعريف الحدين الأعلى والأدنى لمجموعة نجد أنه إذا كانت $A$ مجموعة جزئية وغير خالية من المجموعة المرتبة جزئياً $P$ وكان $a\in P$ حداً أعلى للمجموعة $A$ فإن أي عنصر أخر $b\in P$ يحقق $b\ge a$ يكون أيضاً حداً أعلى للمجموعة $A$. وهذا يبين لنا أن الحد الأعلى للمجموعة $A$ في حال وجوده ليس وحيداً



وهذا الكلام ينطبق أيضاً على الحد الأدنى للمجموعة $A$. بمعنى أخر، إذا وجد للمجموعة $A$ حداً أدنى في $P$ فهو ليس وحيداً، لأجل هذا سوف ندخل المفهوم التالي:

**تعريف.**

لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئياً و $A$ مجموعة جزئية وغير خالية من $P$.

– نسمي مجموعة الحدود العليا للمجموعة $A$ في $P$ بالمخروط الأعلى للمجموعة $A$ في $P$ ونرمز له $A^{\Delta}$.

– نسمي مجموعة الحدود الدنيا للمجموعة $A$ في $P$ بالمخروط الأدنى للمجموعة $A$ في $P$ ونرمز له $A^{\nabla}$.

إن كلاً من المخروطين الأعلى والأدنى يتمتعان بعدد من الخواص نورد بعضاً منها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١-١-١١.**

لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئياً وكل من $A,B$ مجموعة جزئية وغير خالية من $P$.

عندئذ:

١ – إذا كانت $A\subseteq B$ فإن $B^{\Delta}\subseteq A^{\Delta}$ وأن $B^{\nabla}\subseteq A^{\nabla}$.

٢ – $A\subseteq A^{\Delta\nabla}\cap A^{\nabla\Delta}$.

٣ – $A^{\Delta}=A^{\Delta\nabla\Delta}$.

٤ – $A^{\nabla}=A^{\nabla\Delta\nabla}$.

٥ – $(A\cup B)^{\Delta}=A^{\Delta}\cap B^{\Delta}$.

٦ – $(A\cup B)^{\nabla}=A^{\nabla}\cap B^{\nabla}$.

**البرهان.**

١ – ليكن $a\in B^{\Delta}$ عندئذ يكون $a$ حداً أعلى للمجموعة $B$ أي أن $a\ge x$ وذلك أياً كان $x\in B$ وبما أن $A\subseteq B$ فإن $a\ge x$ أياً كان $x\in A$ أي أن $a$ حداً أعلى للمجموعة $A$ وبالتالي $x\in A^{\Delta}$ ومنه $B^{\Delta}\subseteq A^{\Delta}$. ليكن $b\in B^{\nabla}$ عندئذ $b$ هو حداً أدنى

للمجموعة $B$ أي أن $b \le x$ وذلك أيا كان $x \in B$ وبما أن $A \subseteq B$ فإن $b \le x$ أيا كان $x \in A$ وبالتالي $b$ هو حد أدنى للمجموعة $A$ ومنه $b \in A^\nabla$ أي أن $B^\nabla \subseteq A^\nabla$.

٢ – ليكن $x \in A$ عندئذ أيا كان $a \in A^\Delta$ فإن $a \ge x$ ومنه فإن $x$ هو حداً أدنى للمجموعة $A^\Delta$ ومنه $x \in A^{\Delta\nabla}$ أي أن $A \subseteq A^{\Delta\nabla}$. ليكن $y \in A$ عندئذ أيا كان $b \in A^\nabla$ فإن $b \le y$ أي أن $y$ هو حداً أعلى للمجموعة $A^\nabla$ ومنه $y \in A^{\nabla\Delta}$ أي أن $A \subseteq A^{\nabla\Delta}$.

مما سبق نجد أن $A \subseteq A^{\Delta\nabla} \cap A^{\nabla\Delta}$.

٣ – لدينا حسب (٢) أن $A \subseteq A^{\Delta\nabla}$ وحسب (١) نجد أن $A^{\Delta\nabla\Delta} \subseteq A^\Delta$. من جهة أخرى، لنفرض أن $D = A^\Delta$ عندئذ حسب (٢) فإن $D \subseteq D^{\Delta\nabla} \cap D^{\nabla\Delta}$ ومنه $D \subseteq D^{\nabla\Delta}$ وبالتالي $A^\Delta \subseteq A^{\Delta\nabla\Delta}$. مما سبق نجد أن $A^\Delta = A^{\Delta\nabla\Delta}$.

٤ – يبرهن بشكل مشابه للحالة (٣).

٥ – بما أن $A, B \subseteq A \cup B$ فإنه حسب (١) نجد أن $(A \cup B)^\Delta \subseteq A^\Delta$، وأن $(A \cup B)^\Delta \subseteq B^\Delta$ ومنه $(A \cup B)^\Delta \subseteq A^\Delta \cap B^\Delta$. ليكن $a \in A^\Delta \cap B^\Delta$ عندئذ:

– $a \in A^\Delta$ أي أن $a \ge x$ وذلك أيا كان $x \in A$.

– $a \in B^\Delta$ أي أن $a \ge x$ وذلك أيا كان $x \in B$. ومنه $a \ge x$ أيا كان $x \in A \cup B$ أي أن $a \in (A \cup B)^\Delta$ وبالتالي $A^\Delta \cup B^\Delta \subseteq (A \cap B)^\Delta$. مما سبق نجد أن $(A \cup B)^\Delta = A^\Delta \cap B^\Delta$.

٦ – يبرهن بشكل مشابه للحالة (٥). ◦

**تعريف.**

لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئياً و $A$ مجموعة جزئية وغير خالية من $P$.

١ – نقول عن العنصر $a \in P$ أنه حد أعلى أصغري للمجموعة $A$ في $P$ إذا تحقق:

– $a$ حداً أعلى للمجموعة $A$.

– من أجل أي حد أعلى آخر $v$ للمجموعة $A$ فإن $a \le v$.

نرمز للحد الأعلى الأصغري للمجموعة $A$ في $P$ بالرمز $\sup_P A$.

٢ – نقول عن العنصر $b \in P$ أنه حد أدنى أعظمي للمجموعة $A$ في $P$ إذا تحقق:



– $b$ حداً أدنى للمجموعة $A$.

– من أجل أي حد أدنى آخر $u$ للمجموعة $A$ فإن $b \ge u$.

نرمز للحد الأدنى الأعظمي للمجموعة $A$ في $P$ بالرمز $\inf_P A$.

**مثال.**

لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئياً و $a, b \in P$. إذا كان $a \le b$ فإن $\sup\{a,b\} = b$ وإن $\inf\{a,b\} = a$.

إن المثال السابق يبين لنا أنه في المجموعة المرتبة جزئيا $P$ فإن كل مجموعة جزئية مؤلفة من عنصرين متقارنين تملك حداً أعلى أصغرياً وحداً أدنى أعظمياً. وهذه النتيجة يمكن تعميمها على النحو التالي: إذا كانت $P$ مجموعة مرتبة جزئيا فإن كل مجموعة جزئية من $P$ ومرتبة كلياً تملك حداً أدنى أعظمياً وحداً أعلى أصغرياً. واحدة من خواص sup و inf نوردها من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ١-١-١٢.**

لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئياً و $A, B$ مجموعة جزئية وغير خالية من $P$ بحيث $A \subseteq B$. إذا وجد كل من $\sup A, \sup B, \inf A, \inf B$ فإن

$$\sup A \le \sup B, \quad \inf B \le \inf A$$

**البرهان.**

نفرض أن $a = \sup A$ وأن $b = \sup B$. بما أن $b \ge x$ أيا كان $x \in B$ وبما أن $A \subseteq B$ فإن $b \ge x$ وذلك أيا كان $x \in A$ أي أن $b$ حد أعلى للمجموعة $A$. وبما أن $a$ هو أصغر الحدود العليا للمجموعة $A$ نجد أن $a \le b$.

لنفرض أن $a_0 = \inf A$ وأن $b_0 = \inf B$ بما أن $b_0 \le x$ أيا كان $x \in B$ وبما أن $A \subseteq B$ فإن $b_0 \le x$ وذلك أيا كان $x \in A$ أي أن $b_0$ حد أدنى للمجموعة $B$. وبما أن $a_0$ هو أكبر الحدود الدنيا للمجموعة $A$ نجد أن $a_0 \ge b_0$. ◦

نأتي الآن لدراسة خاصة أخرى من خواص sup و inf وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١-١-١٣.**

لتكن $\{A_\alpha\}$ أسرة من المجموعات الجزئية غير الخالية من المجموعة المرتبة جزئيا $P$. إذا كان $A=\cup A_\alpha$ وإذا وجد كل من $\sup A, \sup A_\alpha, \inf A, \inf A_\alpha$ فإن

$$\sup A=\sup\{\sup A_\alpha\}, \quad \inf A=\inf\{\inf A_\alpha\}.$$

**البرهان.**

لنفرض أن $a=\sup A$ وأن $a_\alpha=\sup A_\alpha$. بما أن $a\ge x_\alpha$ أيا كان $x_\alpha\in A_\alpha$ فإن $a\ge a_\alpha$ وذلك أيا كان $\alpha$. ليكن $v\ge a_\alpha$ لأجل كل $\alpha$ عندئذ $v\ge x_\alpha$ أيا كان $x_\alpha\in A_\alpha$ ومنه $v\ge x$ لأجل كل $x\in A$. مما سبق نجد أن $v\ge a$ وحسب التعريف نجد أن

$$\sup A=a=\sup\{a_\alpha\}=\sup\{\sup A_\alpha\}.$$

بشكل مشابه نبرهن أن $\inf A=\inf\{\inf A_\alpha\}$. ٥

علاقة أخرى تصف لنا مدى الارتباط بين sup و inf والمخروط الأعلى لمجموعة ندرسها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١-١-١٤.**

لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئياً و $A$ مجموعة جزئية وغير خالية من $P$. إذا وجد $\sup A$ أو $\inf A^\Delta$ فإن $\sup A=\inf A^\Delta$.

**البرهان.**

لنفرض أن $\sup A$ موجود وأن $a=\sup A$؛ عندئذ $a\ge x$ أيا كان $x\in A$. بالإضافة لذلك فإن $a\le y$ أيا كان $y\in A^\Delta$. من جهة أخرى، ليكن $v\le y$ لأجل كل $y\in A^\Delta$ عندئذ بما أن $a\in A^\Delta$ فإن $v\le a$. مما سبق نجد أن $a=\inf A^\Delta$.

إذا وجد $\inf A^\Delta$ وبفرض أن $b=\inf A^\Delta$ عندئذ أيا كان $x\in A$ فإن $x\le y$ أيا كان $y\in A^\Delta$ ومنه $x\le b$ لأجل كل $x\in A$. ليكن $u\ge x$ لأجل كل $x\in A$ عندئذ $u\in A^\Delta$ ومنه $u\ge b$. مما سبق نجد أن $b=\sup A$. ٥



**مبرهنة ١-١-١٥.**

لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئياً و $A$ مجموعة جزئية وغير خالية من $P$. إذا وجد $\inf A$ أو $\sup A^\nabla$ فإن $\inf A=\sup A^\nabla$.

**البرهان.**

يبرهن بطريقة مشابهة لبرهان المبرهنة (١-١-١٤) لذلك نتركه كتمرين للقارئ. ٥

## ١-٢. المجموعات المرتبة جيداً.

**تعريف.**

نقول عن المجموعة غير الخالية أنها مرتبة جيداً إذا كانت مرتبة كلياً وتحقق الشرط الأصغري.

ينتج من التعريف أن كل مجموعة مرتبة جيداً $A$ تحوي عنصراً أصغراً نرمز له 0 وبما أن المجموعة $A$ مرتبة كليا فإن العنصر الذي يلي 0 نرمز له 1 وهكذا.

**تعريف.**

لتكن $A$ مجموعة مرتبة جيداً و $a\in A$. نسمي المجموعة

$$S(a)=\{x: x\in A; x<a\}$$

قطاعاً ابتدائياً للعنصر $a$ في $A$. ينتج من التعريف أن $S(0)=\Phi$.

**تعريف.**

لتكن $A$ مجموعة مرتبة جيداً و $a\in A$. نقول عن العنصر $a$ إنه عنصر نهاية إذا كان القطاع الابتدائي $S(a)$ لا يحوي عنصراً أكبر.

خواص القطاع الابتدائي $S(a)$ عندما يكون العنصر $a$ عنصر نهاية ندرسها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١-٢-١.**

لتكن $A$ مجموعة مرتبة جيداً و $a\in A$ عنصر نهاية. عندئذ

$$S(a)=\bigcup_{b<a} S(b)$$

**البرهان.**

ليكن $b \in \bigcup_{b<a} S(b)$ عندئذ يوجد $b_0 < a$ يحقق $b \in S(b_0)$ ومنه $b < b_0 < a$ أي أن $b < a$ وبالتالي $b \in S(a)$ أي أن $\bigcup_{b<a} S(b) \subseteq S(a)$. ليكن $x \in S(a)$ ولنفرض أن $x+1$ هو العنصر الذي يلي العنصر $x$. بما أنه لا توجد عناصر بين $x, x+1$ فإن $x+1 \le a$ وبما أن العنصر $a$ هو عنصر نهاية فإن $x+1 \ne a$ أي أن $x+1 < a$ وهكذا نجد أن $x \in S(x+1) \subseteq \bigcup_{b<a} S(b)$ مما سبق نجد أن $S(a) = \bigcup_{b<a} S(b)$ .

لندرس الآن التكافؤ بين تمهيدية زورن وموضوعة الاختيار والنصوص الأخرى التي تكافئ هذين النصين وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١-٢-٢.**

القضايا التالية متكافئة:

**١ - موضوعة الاختيار.**

من أجل أي مجموعة غير خالية $A$ يوجد تطبيق $\varphi : S(A)\setminus\Phi \to A$ يحقق $\varphi(B) \in B$ وذلك من أجل أي مجموعة جزئية وغير خالية من $A$ .

**٢ - مبرهنة زرملو.**

يمكن تعريف علاقة ترتيب على أي مجموعة غير خالية تجعل منها مجموعة مرتبة جيداً.

**٣ - مبرهنة هاوسدورف.**

أي مجموعة جزئية مرتبة كليا من مجموعة مرتبة جزئيا تكون محتواة في مجموعة جزئية مرتبة كليا أعظمية.

**٤ - تمهيدية زورن.**

لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئيا. إذا كان المخروط الأعلى لأي مجموعة جزئية من $P$ ومرتبة كليا ليس خاليا فإن المجموعة $P$ تحوي عناصر أعظمية.



٥ - لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئيا. إذا كان $\sup B$ موجود لأجل أي مجموعة جزئية $B$ من $P$ ومرتبة كليا فإن المجموعة $P$ تحوي عناصر أعظمية.

**البرهان.**

(١)⇐(٥). لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئيا ولنفرض أن $\sup B$ موجود لأجل أي مجموعة جزئية $B$ من $P$ ومرتبة كليا. وليكن $\varphi : S(P)\setminus\Phi \to P$ التطبيق الموجود بحسب موضوعة الاختيار (الفرض). ولنفرض جدلاً أن المجموعة $P$ لا تحوي عناصر أعظمية عندئذ أيا كان $x \in P$ فإن المجموعة $\{x^\Delta \setminus x\}$ تكون غير خالية وذلك لأن العنصر $x$ ليس أعظمياً. لنعرف التطبيق $f : P \to P$ بالشكل $f(x) = \varphi(x^\Delta \setminus x)$ وذلك أيا كان $x \in P$. لنختر من المجموعة $P$ العنصر $a_0$. لأجل إتمام البرهان لابد لنا من بعض التعاريف والتمهيديات الضرورية والتي سنوردها الآن:

**تعريف.**

نقول عن المجموعة الجزئية $H$ من $P$ إنها زورنية إذا كان:

١ - $a_0 \in H$.

٢ - أيا كان $x \in H$ فإن $f(x) \in H$.

٣ - من أجل أي مجموعة جزئية ومرتبة كليا $C$ من $H$ فإن $\sup C \in H$.

**تمهيدية ١.**

القضايا التالية صحيحة.

١ - التقاطع $H_0$ لجميع المجموعات الزورنية من $P$ هو مجموعة زورنية في $P$.

٢ - $a_0^\Delta$ هي مجموعة زورنية.

٣ - $H_0 \subseteq a_0^\Delta$.

**البرهان.**

١ - لنفرض أن $H_0$ هي تقاطع جميع المجموعات الزورنية من $P$. عندئذ $a_0 \in H_0$. ليكن $x \in H_0$ عندئذ $x$ ينتمي إلى أية مجموعة زورنية $H$ من $P$ وبالتالي فإن $f(x)$ ينتمي لأية مجموعة زورنية $H$ من $P$ أي أن $f(x) \in H_0$. لتكن $C$

مجموعة جزئية من $H_0$ ومرتبة كليا عندئذ فإن $C$ محتواة في أية مجموعة زورنية $H$ من $P$ وحسب الفرض فإن $\sup C$ ينتمي إلى أية مجموعة زورنية $H$ من $P$ أي أن $\sup C \in H_0$.

٢ – بما أن $a_0 \geq a_0$ فإن $a_0 \in a_0^{\Delta}$. ليكن $x \in a_0^{\Delta}$ عندئذ فإن

$$f(x)=\varphi(x^{\Delta}\setminus x)\in x^{\Delta}\setminus x$$

أي أن $x$ هو حد أعلى للعنصر $a_0$ وبالتالي $f(x)\in a_0^{\Delta}$. لتكن $C\subseteq a_0^{\Delta}$ مجموعة مرتبة كليا، عندئذ حسب الفرض فإن $\sup C$ موجود. لنفرض أن $d=\sup C$ عندئذ $d\geq c$ أيا كان $c\in C$ وبما أن $C\subseteq a_0^{\Delta}$ فإن $c$ حد أعلى للعنصر $a_0$ أي أن $\sup C\in a_0^{\Delta}$. مما سبق نجد أن المجموعة $a_0^{\Delta}$ زورنية.

٣ – من (١) و(٢) ينتج أن $H_0 \subseteq a_0^{\Delta}$. ∘

**تعريف.**

نقول عن العنصر $a\in H_0$ إنه عنصر مميز إذا حقق الشرط: من أجل أي عنصر $z\in H_0$ يحقق $z<a$ فإن $f(z)\leq a$.

**تمهيدية ٢.**

ليكن $a\in H_0$ عنصراً مميزاً عندئذ فإن المجموعة

$$B(a)=\{z: z\in H_0, z\leq a \vee f(a)\leq z\}$$

هي مجموعة زورنية.

**البرهان.**

إن $a_0\in H_0$ لأن $a\in H_0\subseteq a_0^{\Delta}$ وبالتالي $a_0\leq a$. ليكن $x\in B(a)$ عندئذ إما $x<a$ أو $x=a$ أو $f(a)\leq x$.

– في حالة $x<a$ وبما أن العنصر $a$ مميز فإنه حسب التعريف يكون $f(x)\leq a$ وبالتالي حسب تعريف المجموعة $B(a)$ فإن $f(x)\in B(a)$.

– في حالة $x=a$ فإن $f(x)=f(a)$ ومنه $f(a)\leq f(x)$ وحسب تعريف المجموعة $B(a)$ نجد أن $f(x)\in B(a)$.



– في حالة $f(a)\leq x$. بما أن

$$f(x)=\varphi(x^{\Delta}\setminus x)\in x^{\Delta}\setminus x$$

فإن $f(x)>x$ ومنه $f(a)\leq x<f(x)$ وحسب تعريف المجموعة $B(a)$ ينتج أن $f(x)\in B(a)$.

لتكن $C\subseteq B(a)$ مجموعة مرتبة كليا ولنبرهن على أن $\sup C\in B(a)$. بما أن $C\subseteq B(a)$ فإن $C\subseteq H_0$ وبما أن المجموعة $H_0$ زورنية فإن $\sup C\in H_0$. لأجل المجموعة $C$ نميز حالتين:

– $C\subseteq a^{\nabla}$ عندئذ $\sup C\in a^{\nabla}$ ومنه $\sup C\in a^{\nabla}\cap H_0$ أي أن $\sup C\leq a$ وبالتالي $\sup C\in B(a)$.

– $C\not\subset a^{\nabla}$ ومنه يوجد $c\in C$ بحيث $c\not\leq a$ وبما أن $c\in B(a)$ فإن $f(a)\leq c$ وبالتالي $f(a)\leq \sup C$ ومنه $\sup C\in B(a)$. مما سبق نجد أن المجموعة $B(a)$ زورنية. ∘

**تمهيدية ٣.**

لنفرض أن $A$ هي مجموعة كل العناصر المميزة في المجموعة $H_0$. إن المجموعة $A$ هي مجموعة زورنية.

**البرهان.**

ليكن $a\in A$ ولنبرهن أن $f(a)\in A$ أي لنبرهن أن العنصر $f(a)$ هو عنصر مميز في $H_0$. ليكن $z\in H_0$ ويحقق $z<f(a)$ ولنبرهن على أن $f(z)\leq f(a)$. بما أن $H_0$ هي تقاطع جميع المجموعات الزورنية في $P$ وأن $B(a)$ مجموعة زورنية وحسب التمهيدية (٢) نجد أن $z\in H_0\subseteq B(a)$ ومنه إما $f(a)\leq z$ أو $z\leq a$. وبما أن المتراجحة $f(a)\leq z$ غير محققة لأن $z<f(a)$ نجد أن $z\leq a$. إذا كان $z=a$ عندئذ $f(z)=f(a)$. إذا كان $z<a$ وبما أن العنصر $a$ هو عنصر مميز فإن $f(z)<a$. كذلك بما أن

$$f(a)=\varphi(a^{\Delta}\setminus a)\in a^{\Delta}\setminus a$$

نجد أن $f(a) > a$ ومنه يكون $f(z) \leq a < f(a)$. مما سبق نجد أن $f(z) \leq f(a)$ وبالتالي العنصر $f(a)$ هو عنصر مميز أي أن $f(a) \in A$.

لتكن $C \subseteq A$ مجموعة مرتبة كليا وأن $w = \sup C$ ولنبرهن على أن $w \in A$. أي لنبرهن على أن العنصر $w$ هو عنصر مميز. ليكن $z \in H_0$ ويحقق $z < w$ ولنبرهن على أن $f(z) < w$. بما أن $z < w$ عندئذ يوجد $c \in C$ بحيث $z < c$ لأنه إذا كان $z \not< c$ لأجل جميع العناصر $c \in C$ ولكون العنصر $c$ هو عنصر مميز $\forall c \in C$ وأن المجموعة $B(c)$ هي مجموعة زورنية وذلك حسب التمهيدية (٢) فإن $z \in H_0 \subseteq B(c)$ ومنه إما $z = c$ أو $c < f(c) \leq z$ وذلك أيا كان $c \in C$ ومنه $z \geq w$ وهذا يناقض كون $z < w$. مما سبق نجد أنه يوجد $c \in C$ بحيث $z < c$ وبما أن العنصر $c$ هو عنصر مميز فإن $f(z) \leq c < w$ وهذا يبين لنا أن العنصر $w$ هو عنصر مميز أي أن $w \in A$. ٥

**تمهيدية ٤.**

المجموعة $H_0$ مرتبة كليا.

**البرهان.**

وجدنا حسب التمهيدية (٣) أن المجموعة $A$ هي مجموعة زورنية في $P$ وحسب التمهيدية (١) فإن $H_0 \subseteq A$ أي أن جميع عناصر المجموعة $H_0$ هي عناصر مميزة. ليكن $a, b \in H_0$ وحسب التمهيدية (٢) بما أن العنصر $a$ هو عنصر مميز فإن المجموعة $B(a)$ هي مجموعة زورنية وبالتالي $b \in H_0 \subseteq B(a)$ ومنه حسب تعريف المجموعة $B(a)$ إما $b \leq a$ أو $a < f(a) < b$ وهذا يبين لنا أن المجموعة $H_0$ مرتبة كليا. ٥

لنعد إلى إثبات الاقتضاء (١)⇐(٥).

لنأخذ المجموعة $H_0$ المعرفة في التمهيدية (١) وحسب الفرض فإن $\sup H_0$ موجود. لنفرض أن $w = \sup H_0$ وحسب التمهيدية (٤) فإن المجموعة $H_0$ مرتبة كليا أي أن $w \in H_0$ وبما أن المجموعة $H_0$ زورنية وذلك حسب التمهيدية (١) فإن $f(w) \in H_0$



وهذا يبين لنا أن $w < f(w) \leq w$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن المجموعة $P$ تحوي عناصر أعظمية.

(٢)⇐(٣). لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئيا ولتكن $C$ مجموعة جزئية من $P$ ومرتبة كليا. إذا كان $P = C$ يتم المطلوب. لنفرض أن $P \neq C$ ولنأخذ المجموعة $L = P \setminus C$ وحسب الفرض فإنه بالإمكان تعريف علاقة ترتيب $\leq_0$ على المجموعة $L$ بحيث تجعل المجموعة $L$ مرتبة جيداً. لنعرف على المجموعة $L$ الخاصة $\varepsilon$ إذا حققت الشرط: لأجل جميع العناصر $\beta \in L$ التي من أجلها $\beta \leq_0 \alpha$ توجد مجموعات مرتبة كليا $C_\beta \subseteq L$ تحقق:

١ – $C \subsetneq C_\beta$.

٢ – إذا كان $\alpha \leq_0 \beta \leq_0 \gamma$ فإن $C_\gamma \subseteq C_\beta$.

٣ – إذا كان $\beta \notin C_\beta$ فإن $\beta$ غير متقارن مع أي عنصر $\eta \in C_\gamma$ وذلك لأجل جميع العناصر $\beta \leq_0 \gamma$.

لأجل العنصر الأصغر $0 \in L$ لنفرض أنه:

– إذا كان $0$ غير متقارن مع أي عنصر من عناصر $C$ فإن $C_0 = C$.

– في الحالة المعاكسة فإن $C_0 = C \cup 0$.

فنجد أن $0$ يحقق الخاصة (٤).

ليكن $\alpha \in L$ ولنفرض أن جميع العناصر $x \in L$ التي من أجلها $x < \alpha$ تحقق الخاصة $\varepsilon$ ولنبرهن على أن العنصر $\alpha$ يحقق الخاصة $\varepsilon$.

بما أنه أيا كان $\alpha \leq_0 \beta \leq_0 \gamma$ فإن $C_\gamma \subseteq C_\beta$ وبالتالي فإن المجموعة $\overline{C} = \bigcup_{\beta<\gamma} C_\beta$ هي مجموعة مرتبة كليا. لنفرض أنه:

– إذا كان العنصر $\alpha$ غير متقارن مع أي عنصر من عناصر $\overline{C}$ فإن $\overline{C} = \overline{C}$.

– في الحالة المعاكسة $\overline{C} = \overline{C} \cup \alpha$.

فنجد أن العنصر $\alpha$ يحقق الخاصة $\varepsilon$. وحسب شرط الاستقراء نجد أن المجموعة $L$ تحقق شرط الاستقراء، أي أن كل عنصر من $L$ يحقق الخاصة $\varepsilon$. بمعنى آخر، لأجل

كل عنصر $\alpha \in L$ توجد مجموعة مرتبة كليا $C_\alpha$. لنفرض أن $Q=\bigcup_{\alpha\in L} C_\alpha$. واضح أن المجموعة $Q$ مرتبة كليا وهي أيضا أعظمية، لأنه إذا لم تكن المجموعة $Q$ أعظمية عندئذ يوجد $\eta \notin Q$ بحيث تكون المجموعة $Q\cup\eta$ مرتبة كليا. وبما أن $\eta\notin C$ فإن $\eta \in L$ وهذا يبين لنا أنه يوجد في $Q$ عنصر غير متقارن مع $\eta$ مما يناقض كون المجموعة $Q\cup\eta$ مرتبة كليا.

(٣)⇐(٤). لتكن $P$ مجموعة مرتبة جزئيا تحقق أن أي مجموعة جزئية منها ومرتبة كليا محتواة في مجموعة جزئية مرتبة كليا أعظمية. بما أنه من أجل أي عنصر $a\in P$ فإن المجموعة $\{a\}$ مرتبة كليا وحسب الفرض فإن هذه المجموعة تكون محتواة في مجموعة مرتبة كليا أعظمية ولتكن $C$. وحسب الفرض يوجد $c \in C^\Delta$ بحيث يكون العنصر $c$ أعظمي في المجموعة $P$. لأنه إذا لم يكن العنصر $c$ أعظمي في $P$ فإنه يوجد $x\in P$ بحيث $c<x$، كما أن $x\in C^\Delta \setminus C$ وهذا يبين لنا أن المجموعة $C\cup x$ مرتبة كليا مما يناقض كون المجموعة المرتبة كليا $C$ أعظمية.

(٤)⇐(٥). واضح.

(٥)⇐(٢). لتكن $R$ مجموعة غير خالية. ولتكن $P(R)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من $R$ التي يمكن أن نعرف عليها علاقة ترتيب تجعلها مرتبة جيداً. ولنفرض أن $\Im$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من $R$ التي يمكن أن نعرف عليها علاقة ترتيب مع علاقة الترتيب أي

$$\Im=\{(A,\le_A): A\in R\}$$

بما أنه يمكن أن نعرف أكثر من علاقة ترتيب على المجموعة الواحدة، فإن أي عنصر $B\in R$ يمكن أن يتكرر في $B$ أكثر من مرة ولكن في كل مرة تكون علاقة الترتيب المعرفة على $B$ مختلفة.

من الواضح أن المجموعة $\Im$ غير خالية لأنها تحوي على الأقل جميع المجموعات الجزئية من $P$ وحيدة العنصر. لنعرف على المجموعة $\Im$ العلاقة $(\le')$ بالشكل: أيا كان $A,B\in\Im$ فإن $A\subseteq B$ وأن



$$A\le' B \Leftrightarrow \begin{cases} x\le_B y & if\ x\le_A y \quad \forall x,y\in A\\ a<_B b & if \quad a\in A, and \quad b\in B\setminus A\end{cases}$$

إن العلاقة $(\le')$ المعرفة على $\Im$ هي علاقة ترتيب جزئية.(تأكد من ذلك).

لتكن $\Theta$ مجموعة مرتبة كليا من $\Im$ وأن $C$ هي اجتماع كل المجوعات الجزئية التي تنتمي إلى المجموعة $\Theta$ ولنعرف على المجموعة $C$ العلاقة $(\le)$ بالشكل: أيا كان $x,y\in C$ فإنه يوجد $A,B\in\Theta$ بحيث $x\in A, y\in B$ وبما أن المجموعة $\Theta$ مرتبة كليا فإنه إما $A\le' B$ أو $B\le' A$. لنفرض أن $B\le' A$ عندئذ $B\subseteq A$ ومنه $x,y\in A$ وهنا نقول أن

$$x\le y \Leftrightarrow x\le_A y: \quad A\in\Theta$$

واضح أن العلاقة $(\le)$ انعكاسية.

ليكن $x,y\in C$ بحيث $x\le y\wedge y\le x$ عندئذ يوجد $A,B\in\Theta$ بحيث $x\le_A y\wedge y\le_B x$ وبما أن المجموعة $\Theta$ مرتبة كليا لنفرض أن $A\le' B$ ومنه $A\subseteq B$ وبالتالي

$$x\le_B y\wedge y\le_B x$$

وهذا يبين لنا أن $x=y$ وبالتالي العلاقة $(\le)$ تخالفية.

ليكن $x,y,z\in C$ بحيث $x\le y\wedge y\le z$ عندئذ توجد مجموعات $A,B\in\Theta$ بحيث $x\le_A y\wedge y\le_B z$ وبما أن المجموعة $\Theta$ مرتبة كليا لنفرض أن $A\le' B$ عندئذ $A\subseteq B$ وبالتالي $x\le_B y\wedge y\le_B z$ ومنه $x\le_B z$ أي أن $x\le z$ وهكذا نجد أن العلاقة $(\le)$ متعدية. مما سبق نجد أن العلاقة $(\le)$ هي علاقة ترتيب على المجموعة $C$.

ليكن $x,y\in C$ عندئذ يوجد $A,B\in\Theta$ بحيث $x\in A,y\in B$ وبفرض أن $A\le' B$ لأن المجموعة $\Theta$ مرتبة كليا فإن $A\subseteq B$ ومنه $x\le_B y$ أي أن العنصرين $x,y$ متقارنين في $B$ وبالتالي يكون العنصران $x,y$ متقارنين في $C$ وذلك بحسب تعريف العلاقة $(\le)$. وهذا يبين لنا أن المجموعة $C$ مرتبة كليا. لنبرهن على أن المجموعة $C$ تحقق الشرط الأصغري. لتكن

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots$$

سلسلة متزايدة من عناصر المجموعة $C$. عندئذ

$$x_1 \geq_{A_1} x_2 \geq_{A_2} x_3 \geq_{A_3} \cdots$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \dots \in \Theta$. لنفرض أنه تم الإثبات على أن $x_k \geq_{A_1} x_{k+1}$ وذلك لأجل كل دليل $k < m$. عندئذ $x_m \in A_1$ وأن $x_m \geq_{A_m} x_{m+1}$.

إذا كان $A_m \leq' A_1$ عندئذ من الواضح أن $x_m \geq_{A_1} x_{m+1}$.

لنفرض أن $A_1 \leq' A_m$. إذا كان $x_{m+1} \notin A_1$ عندئذ $x_{m+1} >_{A_m} x_m$ وهذا غير ممكن. وإذا كان $x_{m+1} \in A_1$ وأن $x_{m+1} >_{A_1} x_m$ عندئذ يكون $x_{m+1} >_{A_m} x_m$ وهذا أيضا غير ممكن.

أي أن $x_{m+1} >_{A_1} x_m$ مما يبق نجد أنه تم الحصول على السلسلة المتزايدة

$$x_1 \geq_{A_1} x_2 \geq_{A_1} x_3 \geq_{A_1} \cdots$$

وبما أن المجموعة $A_1$ تحقق الشرط الأصغري وحسب المبرهنة(١-١-٨) فإن هذه السلسلة تتقطع، بمعنى أنه يوجد دليل $n$ من أجله

$$x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة $C$ مرتبة جيداً أي أن $C \in P(R)$.

ليكن $A \in \Im$ عندئذ $A \subseteq C$ وأنه أيا كان $x, y \in A$ بحيث $x \leq_A y$ ينتج أن $x \leq y$. إذا كان $x \in A, y \in C \setminus A$ عندئذ يوجد $B \in \Im$ بحيث $y \in B \setminus A$. وبما أن $A \leq' B$ نجد أن $x \leq_B y$ وبالتالي $x < y$ وهكذا نجد أن $A \leq' C$ وذلك أيا كان $A \in \Im$ أي أن $C \in \Im^{\Delta}$. ليكن $D \in \Im^{\Delta}$ عندئذ $A \subseteq D$ وذلك أيا كان $A \in \Im$ وهذا يبين لنا أن $C \subseteq D$. ليكن $x, y \in C$ بحيث $x \leq_C y$ عندئذ يوجد $A \in \Im$ يحقق $x \leq_A y$ ومنه $x \leq_D y$. إذا كان $c \in C$ و $d \in D \setminus C$ عندئذ يوجد $A \in \Im$ يحقق أن $c \in A$ وبالتالي $c <_D d$ وهكذا نجد أن $C \leq' D$ وبالتالي $C = \sup \Im$. وهكذا نجد أنه في المجموعة المرتبة جزئيا $P(R)$ كل مجموعة جزئية $B$ من $P(R)$ ومرتبة كليا يوجد $\sup B$ وحسب الفرض (٥) فإن المجموعة $P(R)$ تحوي عنصراً أعظمياً وليكن $Q$. إذا كان $Q = R$ يتم المطلوب.



لنفرض أن $Q \neq R$ ولنأخذ عنصر $q \notin Q$ ولنضعه بعد جميع عناصر المجموعة $Q$ فنحصل على مجموعة جديدة $\overline{Q}$ مرتبة جيدا وأن $\overline{Q} \in P(R)$ وبالتالي يكون $Q <' \overline{Q}$ مما يناقض كون $Q$ عنصراً أعظمياً في $P(R)$.

(٢)⇐(١). لتكن $\Im$ مجموعة غير خالية وحسب الفرض (٢) يمكن اعتبار المجموعة $\Im$ مرتبة جيدا. لتكن $A$ مجموعة جزئية من $\Im$ وغير خالية، وبما أن المجموعة $\Im$ تحقق الشرط الأصغري فإن المجموعة $A$ تحوي عنصراً أصغر وليكن $\varphi(A)$. لنعرف العلاقة $\varphi : S(\Im) \setminus \Phi \to \Im$ فنجد انه أيا كانت $\Phi \neq A \subseteq \Im$ فإن $\varphi(A) \in A$ وبما أن العنصر الأصغر وحيد فإن العلاقة $\varphi$ هي تطبيق. ◦

هدفنا التالي هو مقارنة المجموعات المرتبة جيداً، ولأجل هذا لا بد لنا من بعض المفاهيم والنتائج الجديدة وأول هذه المفاهيم هو التعريف التالي:

**تعريف.**

لتكن $A, B$ مجموعات مرتبة جزئيا. نقول عن $A, B$ إنهما متماثلتان إذا وجد تطبيق متباين وغامر( تقابل) من إحدى المجموعتين إلى الأخرى وليكن $f : A \to B$ يحقق أيا كان $x, y \in A$ فإن $x \leq y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ ونعبر عن ذلك $A \approx B$.

**تمهيدية ١-٢-٣.**

لتكن $Q$ مجموعة مرتبة جيداً و $\Theta : Q \to Q$ تماثل. عندئذ أيا كان $x \in Q$ فإن $\Theta(x) \geq x$.

**البرهان.**

لنفرض أنه يوجد $x \in Q$ يحقق $\Theta(x) < x$ ولنأخذ المجموعة

$$S = \{s : s \in Q; \quad \Theta(s) < s\}$$

فنجد أن المجموعة $S$ غير خالية لأن $x \in S$. وبما أن المجموعة $Q$ مرتبة جيداً فهي تحقق الشرط الأصغري وبالتالي فإن المجموعة $S$ تحوي عنصراً أصغر وليكن $a$. بما أن $a \in S$ فإن $\Theta(a) < a$. وبما أن $a$ عنصر أصغر في $S$ نجد أن $\Theta(a) \notin S$ وحسب تعريف المجموعة $S$ يكون $\Theta(\Theta(a)) \geq \Theta(a)$.

من جهة أخرى بما أن $\Theta(a) < a$ فإن

$$\Theta(\Theta(a)) \le \Theta(a)$$

ومنه نجد أن

$$\Theta(\Theta(a)) \le \Theta(a) \le \Theta(\Theta(a))$$

أي أن $\Theta(\Theta(a)) = \Theta(a)$ ولكون $\Theta$ متبايناً نجد أن $\Theta(a) = a$ وهذا يناقض كون $\Theta(a) < a$. مما سبق نجد أن المجموعة $S = \Phi$ وبالتالي يكون $\Theta(x) \ge x$ وذلك أيا كان $x \in Q$. ◦

بالاعتماد على التمهيدية السابقة نحصل على الحقيقة الهامة التالية:

**تمهيدية ١-٢-٤.**

لتكن $Q, Q'$ مجموعات مرتبة جيداً و $f : Q \to Q'$ تماثل. عندئذ أيا كان $a \in Q$ فإن

$$f(S(a)) = S(f(a)).$$

**البرهان.**

ليكن $x \in f(S(a))$ عندئذ يوجد $y \in S(a)$ بحيث $x = f(y)$ وبما أن $y < a$ فإن $x = f(y) < f(a)$ وبالتالي $x \in S(f(a))$. أي أن $f(S(a)) \subseteq S(f(a))$.

ليكن $x' \in S(f(a))$ عندئذ $x' \in Q'$ وبالتالي يوجد $y' \in Q$ بحيث $x' = f(y')$ ومنه $x' = f(y') < f(a)$ أي أن $y' < a$ ومنه $y' \in S(a)$ وهكذا فإن

$$x' = f(y') \in f(S(a))$$

أي أن $S(f(a)) \subseteq f(S(a))$. وهكذا نجد أن $f(S(a)) = S(f(a))$. ◦

خاصة هامة أخرى تتعلق بالمجموعات المرتبة جيداً نوردها من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ١-٢-٥.**

أي مجموعة مرتبة جيداً لا يمكن أن تماثل أي قطاع ابتدائي منها.

**البرهان.**



لتكن $Q$ مجموعة مرتبة جيداً ولنفرض أنه يوجد $a \in Q$ بحيث إن $Q$ تماثل القطاع الابتدائي $S(a)$. عندئذ يوجد تماثل $\Theta : Q \to S(a)$ وبما أن $a \in Q$ فإن $\Theta(a) \in S(a)$ أي أن $\Theta(a) < a$ وهذا يناقض التمهيدية(١-٢-٣) ومنه فإن المجموعة $Q$ لا يمكن أن تماثل أي قطاع ابتدائي منها. ◦

حقيقة أخرى تتعلق بالمجموعات المرتبة جيداً ضرورية لنا في دراستنا نوردها من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ١-٢-٦.**

لتكن $Q, Q'$ مجموعات مرتبة جيداً و $a \in Q, a', b' \in Q'$. إذا وجد تماثل $\varphi : Q \to S(b')$ وتماثل آخر $\psi : S(a) \to S(a')$. عندئذ:

١ - $a' < b'$.

٢ - أيا كان $x \in S(a)$ فإن $\varphi(x) = \psi(x)$.

**البرهان.**

١ - بما أن المجموعة $Q'$ مرتبة جيداً و $a', b' \in Q'$ عندئذ إما $a' < b'$ أو $a' = b'$ أو $a' > b'$. لنفرض أن $a' \ge b'$ عندئذ $S(b') \subseteq S(a')$ وذلك لأنه أيا كان $y \in S(b')$ فإن $y < b' \le a'$ ومنه $y \in S(a')$.

من جهة أخرى بما أن $\psi$ تماثل فإن $\psi^{-1} : S(a') \to S(a)$ أيضا تماثل وأن $\psi^{-1}(S(a')) = S(a)$ كذلك

$$\varphi(\psi^{-1}(S(a'))) = \varphi(S(a)) \subseteq S(b')$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة المرتبة جيداً $S(b')$ تماثل قطاع ابتدائي منها مما يناقض التمهيدية(١-٢-٥) ومنه $a' < b'$.

٢ - لنفرض أنه يوجد عنصر $x \in S(a)$ بحيث $\varphi(x) \ne \psi(x)$ ولنأخذ المجموعة

$$\Im = \{x : x \in S(a); \quad \varphi(x) \ne \psi(x)\}$$

فنجد أن المجموعة $\Im$ غير خالية ولكون المجموعة $Q$ مرتبة جيداً فإن المجموعة $\Im$ تحوي عنصراً أصغر وليكن $b$ عندئذ $b \in S(a)$ وأن $\varphi(b) \ne \psi(b)$. وحسب (١) بما

أن $a' < b'$ فــإن $S(a') \subseteq S(b')$ وأن $\psi(b) \in S(a') \subseteq S(b')$ وبالتـــالي يوجـــد $c' \in S(b')$ يحقق $\psi(b) = c'$ وبما أن $\varphi$ غامر يوجد $c \in Q$ بحيث $\varphi(c) = c'$ وهكذا نجد أن $\psi(b) = \varphi(c)$ كما أن $b < c$. وبما أن $b, c \in Q$ عندئذ إمـا $b < c$ أو $b \geq c$.

من جهة أخرى، بما أن $\psi(b) = \varphi(c)$ نجد أن $b \neq c$.

لنفرض أن $b > c$ عندئذ $c < b < a$ ومنه $b, c \in S(a)$ وبما أن العنصر $b$ هو عنصر أصغر في المجموعة $\Im$ وأن $c < b$ فإن $c \notin \Im$ أي أن $\psi(c) = \varphi(c)$ ومنه

$$\psi(b) = \varphi(c) = \psi(c)$$

ولكون $\psi$ تماثل ينتج أن $b = c$ وهذا غير ممكن كما أوضحنا سابقا. مما سبق نجد أن $b < c$. ومنه $\varphi(S(c)) = S(\varphi(c))$ وبما أن $\psi(b) = \varphi(c)$ نجد أن

$$\varphi(S(c)) = S(\varphi(c)) = S(\psi(b))$$

أي أن

$$\psi^{-1} \circ \varphi(S(c)) = \psi^{-1}(S(\varphi(c))) = \psi^{-1}(S(\psi(b))) = S(b)$$

وهذا يبين لنا أن

$$\psi^{-1} \circ \varphi : S(c) \to S(b)$$

تماثل أي أن المجموعة المرتبة جيداً $S(c)$ تماثل قطاع ابتدائي منها هــو $S(b)$ وهــذا يناقض التمهيدية(١-٢-٥). مما سـبق نجـد أن $\psi(x) = \varphi(x)$ وذلـك أيـا كـان $x \in S(a)$.

نأتي الآن إلى دراسة مبرهنة المقارنة الخاصة بالمجموعات المرتبة جيداً، وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنـة ١-٢-٧.(مبرهنـة المقارنـة).**

لتكن $P, P'$ مجموعات مرتبة جيداً. عندئذ واحدة فقط من القضـايا التاليـة تكـون محققة:

١ - المجموعة $P$ تماثل $P'$.

٢ - المجموعة $P$ تماثل قطاع ابتدائي من $P'$.



٣ - المجموعة $P'$ تماثل قطاع ابتدائي من $P$.

**البرهـان.**

لنشكل المجموعة $\overline{P}$ وذلك بإضافة عنصر $\Omega$ إلى المجموعة $P$ يقـع بعـد جميـع عناصر المجموعة $P$. ولنشكل المجموعة $\overline{P'}$ بإضافة عنصر $\Omega'$ إلى المجموعـة $P'$ يقع بعد جميع عناصر المجموعة $P'$. فنحصل بذلك على مجموعات مرتبة جيداً وهي $\overline{P}$ و $\overline{P'}$. من الواضح أن $P = S(\Omega)$ وأن $P' = S(\Omega')$. لنأخذ المجموعة:

$$S = \{\sigma : \sigma \in \overline{P}; \quad S(\sigma) \not\approx S(\sigma') \quad \forall \sigma' \in \overline{P'}\}$$

إذا كان $\Omega \notin S$ نجد أنه يوجد $\Theta \in \overline{P'}$ بحيث $S(\Theta) \approx S(\Omega)$ وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى. إذا كان $\Theta = \Omega'$ نجد أن

$$P = S(\Omega) \approx S(\Omega') = P'$$

وهنا تتحقق القضية الأولى من المبرهنة.

- الحالة الثانية. إذا كان $\Theta \neq \Omega'$ نجد أن

$$P = S(\Omega) \approx S(\Theta)$$

وهنا تتحقق القضية الثانية من المبرهنة.

لنفرض أن $\Omega \in S$. بما أن المجموعة $\overline{P}$ مرتبة جيداً فهي تحقق الشـرط الأصـغري وبالتالي فإن المجموعة $S$ تحوي عنصراً أصغر وليكن $\alpha$. إن العنصر $\alpha$ ليس عنصراً في $\overline{P}$ (علل ذلك). إذا وجد $\alpha - 1$ العنصر الذي يسبق $\alpha$ عندئـذ $\alpha - 1 \notin S$ وبالتـالي يوجد تماثل

$$\varphi : S(\alpha - 1) \to \beta'$$

حيث $\beta' \in \overline{P'}$، وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى. إذا كان $\beta' = \Omega'$ فإنه تتحقق القضية الثالثة من المبرهنة.
- الحالة الثانيـة. $\beta' \neq \Omega'$ عندئـذ يوجـد $\beta' + 1$ العنصـر الـذي يلـي $\beta'$ (لأن المجموعة $\overline{P'}$) مرتبة جيداً.

لنعرف العلاقة $\overline{\varphi} : S(\alpha) \to S(\beta' + 1)$ بالشكل التالي: أيا كان $\xi \in S(\alpha)$ فإن

$$\overline{\varphi}(\xi)=\begin{cases}\varphi(\xi) & \xi<\alpha-1\\ \beta' & \xi=\alpha-1\end{cases}$$

فنجد أن $\overline{\varphi}$ تطبيق لأنه أيا كان $\xi,\xi'\in S(\alpha)$ بحيث $\xi=\xi'$ فإنه:

- إذا كان $\xi<\alpha-1$ وبما أن $\varphi$ تطبيق فإن $\varphi(\xi)=\varphi(\xi')$ وبالتالي $\overline{\varphi}(\xi)=\overline{\varphi}(\xi')$.
- إذا كان $\xi=\alpha-1$ فإن $\overline{\varphi}(\xi)=\beta'=\overline{\varphi}(\xi')$.

كما أن $\overline{\varphi}$ متباين، لأنه إذا كان $\overline{\varphi}(\xi)=\overline{\varphi}(\xi')$ عندئذ:

- إذا كان $\xi,\xi'<\alpha-1$ فإن $\varphi(\xi)=\overline{\varphi}(\xi)=\overline{\varphi}(\xi')=\varphi(\xi)$ ولكون $\varphi$ تماثلاً نجد أن $\xi=\xi'$.
- إذا كان $\xi=\xi'=\alpha-1$ يتم المطلوب.
- لنفرض أن $\xi<\alpha-1$ وأن $\xi'=\alpha-1$ عندئذ $\overline{\varphi}(\xi)=\varphi(\xi')$ وأن $\overline{\varphi}(\xi')=\beta'$ ومنه $\varphi(\xi)=\beta'$ أي أن $\beta'=\varphi(\xi)\in S(\beta')$ وهذا غير ممكن. مما يبق نجد أن التطبيق $\varphi$ متباين. كذلك فإن $\overline{\varphi}$ لأنه إذا كان $\xi_0\in S(\beta+1)$ فإن $\xi_0<\beta'+1$. ومنه إما $\xi_0=\beta'$ أو $\xi_0<\beta'$.
- إذا كان $\xi_0=\beta'$ فإن $\alpha-1\in S(\alpha)$ وأن $\overline{\varphi}(\alpha-1)=\beta'=\xi_0$.
- إذا كان $\xi_0<\beta'$ وبما أن $\varphi$ تماثل يوجد $\lambda\in S(\alpha-1)\subseteq S(\alpha)$ بحيث $\varphi(\lambda)=\xi_0$ وبما أن $\lambda\in S(\alpha)$ وأن $\lambda<\alpha-1$ فإن $\overline{\varphi}(\lambda)=\varphi(\lambda)=\xi_0$. لنبرهن على أنه

$$\forall a,b\in S(\alpha);\quad a\le b\Leftrightarrow \overline{\varphi}(a)\le\overline{\varphi}(b)$$

لنفرض أن $a\le b$ عندئذ:

- إذا كان $b<\alpha-1$ فإن $a,b\in S(\alpha-1)$ وبما أن $\varphi$ تماثل فإن $\varphi(a)\le\varphi(b)$ وبالتالي $\overline{\varphi}(a)\le\overline{\varphi}(b)$.
- إذا كان $a<b=\alpha-1$ عندئذ $\overline{\varphi}(a)=\beta'$ وأن $a\in S(\alpha-1)$ وبالتالي $\varphi(a)\in S(\beta')$ وهكذا نجد أن

$$\overline{\varphi}(a)=\varphi(a)<\beta'=\overline{\varphi}(b)$$



بشكل مشابه نجد أنه إذا كان $\overline{\varphi}(a)\le\overline{\varphi}(b)$ فإن $a\le b$. بهذا الشكل نجد أن $\overline{\varphi}:S(\alpha)\to S(\beta'+1)$ تماثل وهذا يناقض كون $\alpha\in S$. وهذا بدوره يبين لنا أن الحالة $\beta'\ne\Omega'$ غير محققة، أي أن $\beta'=\Omega'$.

لنعالج الحالة التي يكون فيها العنصر $\alpha$ هو عنصر نهاية عندئذ حسب التمهيدية(١-٢-١) فإن $S(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}S(\beta)$ وحسب اختيارنا للعنصر $\alpha$ فإنه أيا كان $\beta<\alpha$ فإن $\beta\notin S$ وبالتالي يوجد تماثل $\varphi_\beta:S(\beta)\to S(\beta')$ حيث $\beta'\in\overline{P'}$. لنأخذ المجموعة

$$S'=\{\beta':\beta'\in\overline{P'};\quad S(\beta)\approx S(\beta');\quad \forall\beta<\alpha\}$$

واضح أن المجموعة $S'$ غير خالية. إذا وجد في $S'$ عنصر $\beta'=\Omega'$ عندئذ

$$S(\beta)\approx S(\beta')=S(\Omega')=P'$$

وهنا تتحقق القضية الثالثة من المبرهنة.

لنفرض أنه لا يوجد في $S'$ عناصر $\beta'$ تحقق $\beta'=\Omega'$. بما أن المجموعة $S'$ غير خالية وأن $\overline{P'}$ تحقق الشرط الأصغري فإنه يوجد في $S'$ عنصر أصغر وليكن $\alpha'$. ليكن $\xi\in S(\alpha)$ وحسب التمهيدية(١-٢-١) فإن $\xi\in S(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}S(\beta)$ وبالتالي يوجد $\beta<\alpha$ بحيث $\xi\in S(\beta)$ ولكون $\beta<\alpha$ يوجد تماثل

$$\varphi_\beta:S(\beta)\to S(\beta')$$

حيث $\beta'\in\overline{P'}$. لنعرف العلاقة $\varphi:S(\alpha)\to S(\alpha')$ بالشكل $\varphi(\xi)=\varphi_\beta(\xi)$ وذلك أيا كان $\xi\in S(\alpha)$. إن العلاقة $\varphi$ تطبيق لأنه إذا كان $\xi_1,\xi_2\in S(\alpha)$ بحيث $\xi_1=\xi_2$ فإنه يوجد $\beta<\alpha$ بحيث $\xi_1,\xi_2\in S(\beta)$ وأن

$$\varphi(\xi_1)=\varphi_\beta(\xi_2)=\varphi_\beta(\xi_2)=\varphi(\xi_2)$$

لنبرهن على أن التطبيق $\varphi$ متباين. ليكن $\xi_1,\xi_2\in S(\alpha)$ ولنفرض أن $\varphi(\xi_1)=\varphi(\xi_2)$. بما أن $\xi_1,\xi_2\in S(\alpha)$ وحسب التمهيدية(١-٢-١) يوجد $\gamma,\beta<\alpha$ بحيث $\xi_1\in S(\gamma),\xi_2\in S(\beta)$ وبما أن المجموعة $S(\alpha)$ مرتبة كليا، لنفرض أن $\gamma<\beta$ عندئذ $S(\gamma)\subseteq S(\beta)$ وأيضا توجد تماثلات

$$\varphi_\beta : S(\beta) \to S(\beta') \quad و \quad \varphi_\gamma : S(\gamma) \to S(\gamma')$$

حيث $\gamma', \beta' \in \overline{P'}$ وحسب التمهيدية(١-٢-٦) فإن $\gamma' < \beta'$ وأن $\varphi_\gamma(\xi) = \varphi_\beta(\xi)$ وذلك أيا كان $\xi \in S(\gamma)$ ومنه

$$\varphi_\beta(\xi_2) = \varphi(\xi_2) = \varphi(\xi_1) = \varphi_\gamma(\xi_1) = \varphi_\beta(\xi_1)$$

وبما أن $\varphi_\beta$ تماثل نجد أن $\xi_1 = \xi_2$ أي أن التطبيق $\varphi$ متباين. كما أن $\varphi$ غامر، لأنه إذا كان $\xi' \in S(\alpha')$ عندئذ $\xi' < \alpha'$ أي أن $\xi' \notin S'$ وبالتالي $S(\xi') \not\approx S(\xi)$ وذلك أيا كان $\xi \in S$. وهذا يبين لنا أن $S(\xi') \not\approx S(\xi)$ وذلك أيا كان $\xi < \alpha$ وبما أن $S(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} S(\beta)$ فإنه يوجد $\beta < \alpha$ بحيث $\xi < \beta$ أي يوجد تماثل $\varphi_\beta : S(\beta) \to S(\beta')$ حيث $\beta \in \overline{P'}$ وأن $\xi' = \varphi_\beta(\xi) = \varphi(\xi)$. مما سبق نجد أن $\varphi$ تقابل بين $S(\alpha)$ و $S(\alpha')$ ويحقق

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in S(\alpha); \quad \xi_1 = \xi_2 \Leftrightarrow \varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2)$$

(تأكد من ذلك). أي أن التطبيق $\varphi : S(\alpha) \to S(\alpha')$ تماثل وهذا يناقض كون العنصر $\alpha \in S$. مما سبق نجد أنه قد تم البرهان على أن واحدة فقط من القضايا(١)-(٣) تكون محققة. وحسب التمهيدية(١-٢-٦) لا يمكن أن تتحقق القضيتان(١) و(٢) معا أو (١) و (٣) معا. كما أن القضيتين (٢) و(٣) لا تتحققان معا لأنه في الحالة العاكسة نجد أن المجموعة $P$ تماثل قطاع ابتدائي منها مما يناقض التمهيدية(١-٢-٥). ▫

## ١-٣. قدرة مجموعة و المجموعات متساوية القدرة.

إن مفهوم المقارنة بين المجموعات يلعب دوراً هاماً في الرياضيات بشكل عام وفي الجبر المجرد بشكل خاص ولاسيما عند التعامل مع المجموعات غير المنتهية. وتعد علاقة الاحتواء بين المجموعات أبسط المعايير للمقارنة بين المجموعات من حيث طبيعة العناصر. فإذا كانت $A,B$ مجموعتين غير خاليتين فإننا نقول أن $A \subset B$ عندما وفقط عندما يكون كل عنصر من $A$ هو عنصر من $B$.



المعيار الآخر للمقارنة بين المجموعات هو علاقة التساوي بين المجموعات وهذا المعيار في الحقيقة ينتج عن المعيار الأول، وتكون المجموعتان $A,B$ متساويتين عندما وفقط عندما $A \subset B$ و $B \subset A$. أما إذا كانت $A \not\subset B$ أو $B \not\subset A$ فإننا نلاحظ أن المعايير السابقة للمقارنة بين المجموعتين $A,B$ غير فعالة في هذه الحالة. لهذا السبب سوف ندخل في هذه الفقرة معياراً جديداً يمكننا من المقارنة بين المجموعات وسوف نسمي هذا المعيار قدرة المجموعة.

**تعريف.**

لتكن $A,B$ مجموعتين اختياريتين. نقول إن قدرة المجموعة $A$ تساوي قدرة المجموعة $B$ إذا وجد تقابل بين المجموعتين $A$ و$B$. ونقول في هذه الحالة أن المجموعتين $A,B$ متكافئتان ونرمز لذلك بالرمز(~). أي أن

$$A \sim B \Leftrightarrow CardA = CardB \Leftrightarrow \exists f : A \xrightarrow{one-to-one-on-to} B.$$

ينتج من التعريف مباشرة أنه إذا كانت المجموعتان $A,B$ منتهيتين فإن $A \sim B$ عندما وفقط عندما كلتا المجموعتين تملكان العدد ذاته من العناصر. وهذا يبين لنا أن قدرة المجموعة المنتهية هو مفهوم يعبر عن كمية العناصر التي تتألف منها المجموعة. أما قدرة المجموعة غير المنتهية فهو تعميم لمفهوم كمية العناصر التي تتألف منها المجموعة. وهكذا نجد أن مفهوم القدرة بشكل عام يعطينا إمكانية للمقارنة بين المجموعات من حيث كمية العناصر. من جهة أخرى إن مفهوم القدرة يعطينا إمكانية لتجزئة أي جماعة من المجموعات وهذا يتضح لنا مباشرة خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ١-٣-١.**

لتكن $\Im = \{A_i : \quad i \in I\}$ أسرة من المجموعات. إن العلاقة (~) على المجموعة $\Im$ هي علاقة تكافؤ، وصفوف تكافؤ هذه العلاقة هي المجموعات متساوية القدرة.

**البرهان.**

نتركه كتمرين للقارئ. ▫

المثال التالي يعد من أهم التطبيقات على المجموعات المتساوية القدرة.

**مثـــال.**

١ – قدرتا أي مجالين حقيقيين مغلقين متساويتان.

٢ – قدرتا أي مجالين حقيقيين مفتوحين متساويتان.

٣ – قدرتا أي مجالين حقيقيين مفتوحين من اليسار فقط متساويتان.

٤ – قدرتا أي مجالين حقيقيين مفتوحين من اليمين فقط متساويتان.

**البرهـــان.**

١ – ليكن $[a,b]$ و $[c,d]$ مجـــالين حقيقيـــين بحيـــث $a \neq b$ و $c \neq d$. العلاقـــة $f:[a,b] \to [c,d]$ المعرفة بالشكل التالي: أياً كان $x \in [a,b]$ فإن

$$f(x)=\frac{x-a}{b-a}(d-c)+c$$

هو تقابل (تأكد من ذلك). وبالتالي

$$.Card[a,b]=Card[c,d]$$

٢ – ليكن $]a,b[$ و $]c,d[$ مجالين حقيقيين مفتوحين بحيث $a \neq b$ و $c \neq d$. وهنا نميز الحالات التالية:

آ– طرفا كل من المجالين $]a,b[$ و $]c,d[$ محدودان وفي هذه الحالة يعتبر التطبيق $f:]a,b[\to]c,d[$ المعرف بالشكل: أياً كان $x \in ]a,b[$ فإن

$$f(x)=\frac{x-a}{b-a}(d-c)+c$$

هو تقابل وبالتالي يتم المطلوب.

ب–طرفا المجال $]a,b[$ محدودين والطرف الأيسر للمجال $]c,d[$ غيـــر محـــدود. أي أن $]c,d[=]-\infty,d[$. وفي هذه الحالة يكون التطبيق $f:]-2,0[\to]-\infty,d[$ المعرف بالشكل التالي: أياً كان $x \in ]-2,0[$ فإن

$$f(x)=\frac{x}{x+2}+d$$

هو تقابل.ومنه نجد



$$Card]a,b[=Card]-2,0[=Card]-\infty,d[$$

وذلك بالاعتماد على(١).

ث– طرفي المجال $]a,b[$ محدودين والطرف الأيمن للمجال $]c,d[$ غيـــر محـــدود أي $]c,d[=]c,\infty[$. في هذه الحالة فإن العلاقة $f:]0,2[\to]c,\infty[$ المعرفة بالشكل التالي: أياً كان $x \in ]0,2[$ فإن

$$f(x)=\frac{x}{2-x}+c$$

هي تقابل وبالاعتماد على(١) نجد أن

$$.Card]a,b[=Card]0,2[=Card]c,\infty[$$

د– طرفا المجـــال $]a,b[$ محـــدودان وطرفـــا المجـــال $]c,d[$ غيـــر محـــدودين. أي $]c,d[=]-\infty,\infty[$. في هذه الحالة فإن العلاقـــة $f:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to]-\infty,\infty[$ المعرفـــة بالشكل التالي: أياً كان $x \in ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ فإن $f(x)=tgx$ هي تقابل ومنه

$$.Card]a,b[=Card]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[=Card]-\infty,\infty[$$

٣ – ليكن $[a,b[$ و $[c,d[$ مجالين حقيقيين مفتوحين من اليمين فقـــط بحيـــث $a \neq b$ و $c \neq d$. وهنا نميز الحالات التالية:

آ– الطرف الأيمن في كلا المجالين محدود. عندئذ العلاقة $f:[a,b[\to[c,d[$ المعرفة بالشكل التالي:أياً كان $x \in [a,b[$ فإن

$$f(x)=\frac{x-a}{b-a}+c$$

هي تقابل، وبذلك نجد أن

$$.Card[a,b[=Card[c,d[$$

ب– الطرف الأيمن لأحد المجـــالين غيـــر محـــدود. لنفـــرض أن الطـــرف الأيمـــن للمجال $[a,b[$ محدود والطرف الأيمن للمجال $[c,d[$ غير محدود.عندئذ $[c,d[=[c,\infty[$ ومنه العلاقة $f:[0,2[\to[c,\infty[$ المعرفة بالشكل التالي:

أياً كان $x \in [0,2[$ فإن

$$f(x)=\frac{x}{2-x}+c$$

هي تقابل. ومنه

$$.Card[a,b[=Card[0,2[=Card[c,\infty[$$

٤ – يبرهن بشكل مشابه للحالة (٣). ◦

بعد أن توصلنا إلى الشرط اللازم و الكافي لتساوي قدرتي مجموعتين نأتي الآن لدراسة الشرط اللازم والكافي كي تكون قدرة مجموعة ما أصغر من قدرة مجموعة أخرى.

**تعريف.**

نقول إن قدرة المجموعة $A$ أصغر من قدرة المجموعة $B$ إذا وجد تطبيق متباين من $A$ إلى $B$. بمعنى أخر

$$.CardA \le CardB \Leftrightarrow \exists f : A \xrightarrow{one-to-one} B$$

بالاعتماد على هذا التعريف يمكننا صياغة شرط آخر لتساوي قدرتي مجموعتين وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١-٣-٢.(كانتور- برنشتاين).**

لتكن $A,B$ مجموعتين اختياريتين. إذا وجد تطبيق متباين من $A$ إلى $B$ وتطبيق متباين آخر من $B$ إلى $A$ ، عندئذ تكون $A \sim B$ .

**البرهان.**

لنفرض أن $f : A \to B$ تطبيق متباين و $\Psi : B \to A$ تطبيق متباين أيضاً. لنضع $f(A)=B_1$ فيكون $f : A \to B_1$ تقابلاً. أيضاً إذا فرضنا $\Psi(B)=A_1$ يكون $\Psi : B \to A_1$ تقابلاً أيضاً. من جهة أخرى إن مقصور $\Psi$ على $B_1$ أي $\Psi_{B_1} : B_1 \to A_1$ هو تطبيق متباين و بفرض $\Psi_{B_1}(B_1)=A_2$ نجد أن التطبيق $\Psi_{B_1} : B_1 \to A_2$ هو تقابل. وهكذا نجد أن التطبيق

$$\Theta = \Psi_{B_1} \circ f : A \to A_2$$



تقابل. وبفرض أن $A_0 = A$ يكون $\Theta(A_0)=A_2$ . لنفرض أن $\Theta(A_{i-2}) = A_i$ حيث $i=2,3,4,\cdots$ . عندئذ نحصل على السلسلة التالية

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_{n-1} \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \cdots$$

من المجموعات الجزئية من $A$. من خلال المجموعات $A_i$ سوف نشكل تجزئة للمجموعتين $A_0, A_1$ . لنفرض أن $D=\bigcap_{i=0}^{\infty} D_i$ . عندئذ يكون

$$A_1 = D \cup [\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus A_{i+1})] \quad \text{و} \quad A_0 = D \cup [\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_{i-1} \setminus A_i)]$$

وهكذا نجد أن الجماعة $\{D,(A_{i-1} \setminus A_i)\}_{i=1}^{\infty}$ هي تجزئة للمجموعة $A_0$ . وأن الجماعة $\{D,(A_i \setminus A_{i+1})\}_{i=1}^{\infty}$ هي تجزئة للمجموعة $A_1$ . من جهة أخرى فإن

$$A_0 = D \cup [\bigcup_{i=0}^{\infty}(A_{2i} \setminus A_{2i+1})] \cup [\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_{2i-1} \setminus A_{2i})]$$

أيضاً

$$.A_1 = D \cup [\bigcup_{i=0}^{\infty}(A_{2i+2} \setminus A_{2i+3})] \cup [\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_{2i-1} \setminus A_{2i})]$$

وبفرض أن $S = D \cup [\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_{2i-1} \setminus A_{2i})]$ نجد أن

$$A_1 = S \cup [\bigcup_{i=0}^{\infty}(A_{2i+2} \setminus A_{2i+3})] \quad \text{و} \quad A_0 = S \cup [\bigcup_{i=0}^{\infty}(A_{2i} \setminus A_{2i+1})]$$

أي أن الجماعة $\{S,(A_{2i} \setminus A_{2i+1})\}_{i=0}^{\infty}$ تشكل تجزئة للمجموعة $A_0$ وكذلك الجماعة $\{S,(A_{2i+2} \setminus A_{2i+3})\}_{i=0}^{\infty}$ تشكل تجزئة للمجموعة $A_1$ . لنعرف التطبيق $\overline{\Psi} : A_0 \to A_1$ بالشكل التالي: أيا كان $a \in A_0$ فإن

$$.\overline{\Psi}(a) = \begin{cases} a & a \in S \\ \Theta(a) & a \notin S \end{cases}$$

إن التطبيق $\overline{\Psi}$ متباين لأنه إذا كان $a,b \in A_0$ بحيث $a = b$ فإنه:

- إذا كان $a \in S$ فإن $.\overline{\Psi}(a) = a = b = \overline{\Psi}(b)$

- إذا كان $a \notin S$ فإن $.\overline{\Psi}(a) = \Theta(a) = \Theta(b) = \overline{\Psi}(b)$

كما أن التطبيق $\overline{\Psi}$ غامر لأنه إذا كان $b \in A_1$ فإنه:

- إذا كان $b \in S$ فإن $b \in A_0$ وبالتالي $\overline{\Psi}(b) = b$.
- إذا كان $b \in A \setminus S$ فإن

$$b \in \bigcup_{i=0}^{\infty}(A_{2i+2} \setminus A_{2i+3}) = \bigcup_{i=0}^{\infty}(\Theta(A_{2i}) \setminus \Theta(A_{2i+1})) = \bigcup_{i=0}^{\infty}[\Theta(A_{2i} \setminus A_{2i+1})] =$$

$$= \Theta[\bigcup_{i=0}^{\infty}(A_{2i} \setminus A_{2i+1})] = \Theta(A_0 \setminus S)$$

ومنه يوجد $a \in A_0 \setminus S$ بحيث $\Theta(a) = b$ وذلك لأن $\Theta$ غامر. وهكذا فإن

$$\overline{\Psi}(a) = \Theta(a) = b$$

أي أن $\overline{\Psi}$ غامر. مما سبق نجد أن $\overline{\Psi}: A_0 \to A_1$ تقابل. وبما أن $\Psi: B \to A_1$ تقابل فإن $\Psi^{-1}: A_1 \to B$ أيضاً تقابل وبالتالي $\Psi^{-1} \circ \overline{\Psi}: A_0 \to B$ تقابل. وهكذا نجد أن $A \sim B$. ◦

خواص العلاقة ≤ على مجموعة القدرات نوردها من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ١-٣-٣.**

العلاقة ≤ بين القدرات هي علاقة ترتيب جزئية على مجموعة القدرات.

**البرهان.**

نتركه للقارئ. ◦

المبرهنة التالية توضح لنا العلاقة بين قدرة المجموعة و قدرة مجموعة أجزائها.

**مبرهنة ١-٣-٤.**

لتكن $A$ مجموعة ما و $P(A)$ مجموعة أجزاء المجموعة $A$. عندئذ:

$$CardA < CardP(A)$$

**البرهان.**

سوف نميز حالتين:

- الحالة الأولى: إذا كانت $A = \Phi$ عندئذ $CardA = 0 < 1 = CardP(A)$.



- الحالة الثانية: إذا كانت $A \neq \Phi$ لنأخذ العلاقة $f: A \to P(A)$ المعرفة بالشكل التالي: أياً كان $a \in A$ فإن $f(a) = \{a\}$. من الواضح أن $f$ تطبيق متباين وبالتالي $CardA \leq CardP(A)$. لنفرض جدلاً أن $CardA = CardP(A)$ عندئذ يوجد تقابل وليكن $\Phi: A \to P(A)$. لنأخذ المجموعة

$$H = \{a : a \in A; \quad a \notin \Phi(a)\}$$

واضح أن $H \neq \Phi$ لأنه إذا كانت $H = \Phi$ فإنه يوجد $d \in A$ بحيث $d \in \Phi(d) = \Phi$ (لأن $\Phi$ غامر) وهذا غير ممكن. إذاً $H \neq \Phi$ وبالتالي يوجد عنصر $b \in A$ بحيث $\Phi(b) = H$. وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى: إذا كان $b \in H$ عندئذ $b \notin \Phi(b) = H$.
- الحالة الثانية: إذا كان $b \notin H$ عندئذ $b \in \Phi(b) = H$.

وهذا غير ممكن في كلا الحالتين. مما سبق نجد أن $CardA \neq CardP(A)$. وهذا يبين لنا أن $CardA < CardP(A)$. ◦

اعتماداً على تعريف قدرة المجموعة و المبرهنة الأخيرة نجد أن قدرات المجموعات تتوضع في سلسلة متزايدة من الشكل

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < n < n+1 < \cdots$$

حيث الأعداد الطبيعية تمثل قدرات المجموعات المنتهية وهذه السلسلة غير منتهية (لا تتقطع) وهذا ما تثبته المبرهنة(١-٣-٤).

**مبرهنة ١-٣-٥. (مقارنة المجموعات).**

من أجل أي مجموعتين $A,B$ تتحقق واحدة فقط من القضايا التالية:

١ - المجموعة $A$ تكافئ المجموعة $B$.

٢ - المجموعة $A$ تكافئ مجموعة جزئية من $B$ و $B$ لا تكافئ أي مجموعة جزئية من $A$.

٣ - المجموعة $B$ تكافئ مجموعة جزئية من $A$ و $A$ لا تكافئ أي مجموعة جزئية من $B$.

**البرهـــان.**

بما أنه بالإمكان تعريف علاقات ترتيب على المجموعات $A$ و $B$ بحيث تجعلها مجموعات مرتبة جيداً فإنه حسب المبرهنة(١-٢-٧) تتحقق واحدة فقط من الحالات التالية:

١- المجموعة $A$ تكافئ المجموعة $B$.

٢ – المجموعة $A$ تكافئ مجموعة جزئية من $B$.

٣ – المجموعة $B$ تكافئ مجموعة جزئية من $A$.

و إلا تكون مبرهنة كانتور– برنشتاين محققة. ◦

**العمليـات على القـدرات.**

وجدنا سابقا أن كل عدد طبيعي يمثل قدرة لمجموعة منتهية، وانطلاقا من هذا سوف نقوم بتعريف عمليات مشابهة للعمليات على الأعداد الطبيعية (جمع وضرب ...) بحيث تتطابق هذه العمليات مع مثيلاتها في مجموعة الأعداد الطبيعية.

**تعريف.**

لتكن $m$ قدرة لمجموعة ما. نقول إن $m$ هي مجموع للقدرتين $m_1,m_2$ أي $m = m_1 + m_2$ إذا كانت كل مجموعة قدرتها $m$ يمكن تمثيلها على شكل اجتماع لمجموعتين غير متقاطعتين قدرة إحداها $m_1$ وقدرة الأخرى $m_2$.

**تمهيدية ١-٣-٦.**

لأجل أي مجموعتين $A_1,A_2$ توجد مجموعتان $B_1,B_2$ بحيث $A_1 \sim B_1$ و $A_2 \sim B_2$ وأن $B_1 \cap B_2 = \Phi$.

**البرهـان.**

ليكن $a_1 \neq a_2$ عنصرين ما ( على سبيل المثال $a_1 = 1, a_2 = 2$ ) ولنضع

$$B_1 = \{a_1\} \times A_1 \quad و \quad B_2 = \{a_2\} \times A_2$$

فنجد أن التطبيقات التالية $f_1 : A_1 \to B_1$ المعرف بالشكل $f_1(x) = (a_1, x)$ أيا كان $x \in A_1$. و $f_2 : A_2 \to B_2$ المعرف بالشكل $f_2(y) = (a_2, y)$ أيا كان $y \in A_2$ كل



منهما تقابل ( تأكد من ذلك) ومنه $A_1 \sim B_1$ و $A_2 \sim B_2$ وأن $B_1 \cap B_2 = \Phi$. ◦

**تمهيدية ١-٣-٧.**

لأجل أي قدرتين $m_1,m_2$ توجد القدرة $m_1 + m_2$.

**البرهـان.**

بما أن $m_1,m_2$ قدرتان فإنه يوجد مجموعتان $A_1,A_2$ بحيث $CardA_1 = m_1$ وأن $CardA_2 = m_2$. لنأخذ المجموعتين $B_1,B_2$ المعرفتين في التمهيدية(١-٣-٦). بما أن $B_1 \cap B_2 = \Phi$ فإنه حسب التعريف

$$Card(B_1 \cup B_2) = CardB_1 + CardB_2 = CardA_1 + CardA_2 = m_1 + m_2$$ ◦

المبرهنة التالية تبين لنا خواص عملية الجمع.

**مبرهنة ١-٣-٨.**

إن جمع القدرات تبديلي وتجميعي. بمعنى أنه من أجل القدرات $m_1,m_2,m_3$ فإن:

١ – $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$.

٢ – $(m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)$.

**البرهـان.**

١ – لنفرض أن $A$ مجموعة تحقق $CardA = m_1 + m_2$ عندئذ توجد مجموعتان $A_1,A_2$ بحيث $A_1 \cap A_2 = \Phi$ و $A = A_1 \cup A_2$ وأن $CardA_1 = m_1, CardA_2 = m_2$ ومنه نجد أن $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$. بشكل مشابه نبرهن على الخاصة ٢. ◦

لنتعرف الآن كيفية جداء القدرات.

**تعريف.**

نقول عن القدرة $m$ إنها جداء للقدرتين $m_1,m_2$ أي $m = m_1.m_2$ إذا كانت كل مجموعة قدرتها $m$ تساوي جداء ديكارتي لمجموعتين $A_1,A_2$ بحيث $CardA_1 = m_1, CardA_2 = m_2$. أي أن $Card(A_1 \times A_2) = CardA_1.CardA_2$.

ينتج من التعريف أن جداء القدرتين $m_1.m_2$ موجود دائما.

خواص جداء القدرات وعلاقته بالمجموع نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنـــة ١-٣-٩.**

إن جداء القدرات يتمتع بالخواص التالية: أيا كانت القدرات $m_1, m_2, m_3$ فإن:

١ - $m_1.m_2 = m_2.m_1$ .

٢ - $(m_1.m_2)m_3 = m_1(m_2.m_3)$ .

٣ - $m_1(m_2 + m_3) = m_1.m_2 + m_1.m_3$ .

**البرهـــان.**

لتكن $A, B, D$ مجموعات تحقق

$$CardA = m_1, CardB = m_2, CardD = m_3$$

١ - بما أن المجموعتين $A\times B, B\times A$ متكافئتـــان أي $A\times B \sim B\times A$ فإنـــه حســـب التعريف

$$Card(A\times B) = Card(B\times A)$$

ومنه $m_1.m_2 = m_2.m_1$ .

٢ - بما أن $(A\times B)\times D \sim A\times(B\times D)$ نجد

$$Card(A\times B)\times D = CardA\times(B\times D)$$

ومنه $Card(A\times B).CardD = CardA.Card(B\times D)$ أي

$$(m_1.m_2)m_3 = m_1(m_2.m_3)$$

٣ - لنفرض أن $A\cap D = \Phi$ عندئذ بما أن $A\times(B\cup D) = (A\times B)\cup(A\times D)$ فإن $A\times B\cap B\times A = \Phi$ ومنه $m_1(m_2 + m_3) = m_1.m_2 + m_1.m_3$ .

## ١-٤. المجموعـــات القابلـــة للعـــد.

وجدنا سابقاً أن العلاقة $(\sim)$ أو علاقة تساوي القدرات هـــي علاقـــة تكـــافؤ علـــى المجموعات، وبالتالي فإن هذه العلاقة تجزئ لنا أي جماعة مـــن المجموعـــات إلـــى صفوف تكافؤ. إن أحد أهم صفوف تكافؤ هذه العلاقـــة هـــو صـــف التكـــافؤ المولـــد بمجموعة الأعداد الطبيعية $[N^*]$ .



**تعريـــف.**

سوف نقول عن المجموعة $A$ إنها قابلة للعد، إذا كانت تنتمي إلى صـــف التكـــافؤ المولد بمجموعة الأعداد الطبيعية الناتج عن العلاقة $(\sim)$. أو بمعنى آخر، نقـــول عـــن المجموعة $A$ إنها قابلة للعد إذا كانت قـــدرتها مســـاوية لقـــدرة مجموعـــة الأعـــداد الطبيعية $N^*$. والذي يكافئ بدوره إمكانية ترقيم عناصر المجموعة $A$ بوساطة الأعداد الطبيعة. نرمز لقدرة مجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز $\aleph_0$ ونقرأ (ألف صفر) وبالتالي تكون قدرة أي مجموعة قابلة للعد مساوية $\aleph_0$.

من التعريف ينتج مباشرة أن أي مجموعة قابلة للعد هي مجموعة غير خالية و غير منتهية.

**أمثلـــة:**

١- المجموعة $N^*$ قابلة للعد.

٢- مجموعة الأعـــداد الصـــحيحة الزوجيـــة الموجبـــة قابلـــة للعـــد، لأن العلاقـــة $f: N^* \to 2Z^+$ المعرفة بالشكل $f(n) = 2n$ أياً كان $n\in N^*$ تكون تقابلاً.

٣ - كل من المجموعات $Z^+$ و $Z^-$ قابلة للعد.

٤ - مجموعة الأعداد الصحيحة $\boldsymbol{Z}$ قابلة للعـــد لأن العلاقـــة $f: Z \to N^*$ المعرفـــة بالشكل التالي أياً كان $n\in Z$ فإن

$$f(n) = \begin{cases} 2n+1 & n\geq 0 \\ 2|n| & n<0 \end{cases}$$

هي تقابل.

٥ - مجموعة الأعداد العادية $\boldsymbol{Q}$ قابلة للعد.

نعلم أن كل عنصر $\alpha\in Q$ هو عبارة عن كسر $\alpha = \dfrac{p}{q}$ غير قبل للاختصار حيـــث $p, q\in Z$ وأن $q>0$، وهذه الكتابة وحيدة. نسمي المجموع $|p|+q$ ارتفاع العدد $\alpha$. واضح أن الأعداد التي يكون ارتفاع كل منها $n$ تشكل مجموعة منتهية، فعلـــى ســـبيل المثال يوجد عدد واحد فقط ارتفاعه 1 هو $\frac{0}{1}$ وأنه يوجد عددين ارتفاع كـــل منهمـــا 2

هما $\frac{2}{1},\frac{1}{2}$ وتوجد أربعة أعداد ارتفاع كل منها 3 وهي $\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-2}{1}$ وهكذا. سوف نقوم بترقيم جميع الأعداد $\alpha\in Q$ بحسب ارتفاعها ونبدأ بالعدد الذي ارتفاعه 1 ثم بالأعداد التي ارتفاعها 2 وهكذا، فنجد أنه بهذه العملية يتم بناء تقابل بين $N^*$ و $Q$ وهذا يبين أن المجموعة $Q$ قابلة للعد. $\circ$

نأتي الآن إلى دراسة خواص المجموعات القابلة للعد وأولى هذه الخواص نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١-٤-١.**

كل مجموعة جزئية وغير منتهية من $N^*$ تكون قابلة للعد.

**البرهان.**

لتكن $D$ مجموعة جزئية من $N^*$ وغير منتهية. ولكون المجموعة $N^*$ تحقق الشرط الأصغري، لنفرض أن $a_1$ العنصر الأصغر في $D$ و $a_2$ العنصر الأصغر في $D\setminus\{a_1\}$ و $a_3$ العنصر الأصغر في $D\setminus\{a_1,a_2\}$.

لنفرض أنه تم تعيين العنصر $a_k$ الذي هو عنصراً أصغراً في المجموعة $D\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}\}$ عندئذ بالا مكان تعين العنصر $a_{k+1}$ والذي هو عنصراً أصغراً في المجموعة $D\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$. نتابع بالاستقراء على هذا الشكل نجد أن $D=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ أي أن المجموعة $D$ قابلة للعد. $\circ$

المبرهنة السابقة يمكن تعميمها على النحو التالي:

**مبرهنة ١-٤-٢.**

أي مجموعة جزئية وغير منتهية من مجموعة قابلة للعد تكون أيضاً قابلة للعد.

**البرهان.**

لتكن $D$ مجموعة قابلة للعد و$S$ مجموعة جزئية من $D$ و غير منتهية. بما أن المجموعة $D$ قابلة للعد يوجد تقابل $f:D\to N^*$. من جهة أخرى، التطبيق $\Psi:S\to D$ المعرف بالشكل $\Psi(a)=a$ أياً كان $a\in S$ هو تطبيق متباين وهذا يبين لنا أن التطبيق $f\circ\Psi:S\to N^*$ متباين. وبما أن المجموعة $f\circ\Psi(S)$



غير منتهية ومحتواة في $N^*$ نستنتج أن المجموعة $f\circ\Psi(S)$ قابلة للعد. بهذا الشكل نجد أن المجموعة $S$ قابلة للعد. $\circ$

وجدنا أن كل مجموعة قابلة للعد هي مجموعة غير منتهية، وهنا لابد لنا من التساؤل هل العكس صحيح، بمعنى آخر، هل كل مجموعة غير منتهية تكون قابلة للعد. الجواب عن هذا التساؤل نجده في المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١-٤-٣.**

كل مجموعة غير منتهية تحوي مجموعة جزئية قابلة للعد.

**البرهان.**

لتكن $S$ مجموعة غير منتهية ولنفرض أن $x_1$ هو العنصر المختار من المجموعة $S$ اعتماداً على موضوعة الاختيار. و لنفرض أيضاً $x_2$ العنصر المختار من المجموعة $S\setminus\{x_1\}$. لنفرض أنه تم تعيين العناصر $x_1,x_2,\cdots,x_n$ بالطريقة السابقة. عندئذ يمكننا تعيين العنصر $x_{n+1}$ على أنه العنصر المختار من المجموعة $S\setminus\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ وذلك حسب موضوعة الاختيار أيضاً. وهكذا نحصل بالاستقراء على التطبيق المتباين $f:N^*\to S$ الذي قاعدة ربطه $f(n)=x_n$ وذلك أياً كان $n\in N^*$. وهكذا نجد أن المجموعة

$$f(N^*)=\{x_n:\quad n\in N^*\}$$

قابلة للعد وأن $f(N^*)\subseteq S$. $\circ$

**تمهيدية ١-٤-٤.**

لتكن $A$ مجموعة قابلة للعد. إذا كانت $K$ مجموعة جزئية منتهية من $A$ عندئذ تكون المجموعة $A\setminus K$ قابلة للعد.

**البرهان.**

إن المجموعة $A\setminus K$ غير منتهية(تأكد من ذلك). وحسب المبرهنة(١-٤-٣) فهي تحوي مجموعة جزئية قابلة للعد ولتكن $B$. ومنه يوجد تقابل $f:N^*\to B$. من جهة أخرى يوجد تطبيق متباين $\Phi:B\to A\setminus K$، وهكذا نجد أن التطبيق

$\Phi \circ f : N^* \to A \setminus K$ هو تطبيق متباين. كذلك بما أن المجموعة $A$ قابلة للعد يوجد تقابل $f_1 : A \to N^*$ وكذلك يوجد تطبيق متباين $\Phi_1 : A \setminus K \to A$. وهكذا نجد أن التطبيق $\Phi_1 \circ f_1 : A \setminus K \to N^*$ هو تطبيق متباين. وحسب المبرهنة (١-٤-٢) نجد أن المجموعة $A \setminus K$ قابلة للعد. ◦

خواص أخرى للمجموعات القابلة للعد نوردها من خلال التمهيديتين التاليتين:

**تمهيدية ١-٤-٥.**

لتكن $A$ مجموعة قابلة للعد و $B$ مجموعة غير منتهية. تكون المجموعة $B$ قابلة للعد في كل من الحالات التالية:

١- إذا وجد تطبيق متباين $f : B \to A$.

٢- إذا وجد تطبيق غامر $g : A \to B$.

**البرهان.**

١ - ليكن $f : B \to A$ تطبيق متباين ولنفرض أن $f(B) = H$ عندئذ التطبيق $f : B \to H$ تقابل، وبالتالي تكون المجموعة $H$ غير منتهية وبما أن $H \subseteq A$ وحسب المبرهنة (١-٤-٢) فإن المجموعة $H$ تكون قابلة للعد، وبالتالي المجموعة $B$ تكون أيضاً قابلة للعد.

٢ - ليكن $g : A \to B$ تطبيقاً غامراً. لأجل كل عنصر $y \in B$ لنثبت عنصراً واحداً فقط $x_y \in A$ بحيث $g(x_y) = y$. بهذا الشكل نحصل على التطبيق المتباين $\Theta : B \to A$ الذي قاعدة ربطه $\Theta(y) = x_y$، وبما أن المجموعة $B$ غير منتهية حسب (١) تكون المجموعة $B$ قابلة للعد. ◦

**تمهيدية ١-٤-٦.**

القضايا التالية صحيحة:

١- المجموعة $N^* \times N^*$ قابلة للعد.

٢- إذا كانت المجموعة $D$ قابلة للعد فإن المجموعة $D \times D$ تكون قابلة للعد.

٣- إذا كانت المجموعتان $A,B$ قابلتين للعد تكون المجموعة $A \cup B$ قابلة للعد.



٤- إذا كانت المجموعة $A$ قابلة للعد والمجموعة $K$ منتهية فإن المجموعة $A \cup K$ تكون قابلة للعد.

**البرهان.**

١ - التطبيق $f : N^* \times N^* \to N^*$ الذي قاعدة ربطه $f((n,m)) = 2^n.3^m$، وذلك أياً كان $(n,m) \in N^* \times N^*$ هو تطبيق متباين وحسب التمهيدية(١-٤-٥) تكون المجموعة غير المنتهية $N^* \times N^*$ قابلة للعد.

٢ - لنفرض أن المجموعة $D$ قابلة للعد، عندئذ يوجد تقابل $g : D \to N^*$. لنعرف التطبيق $f : D \times D \to N^* \times N^*$ الذي قاعدة ربطه

$$f((a,b)) = (g(a), g(b))$$

وذلك أيا كان $(a,b) \in D \times D$ فنجد أن $f$ تقابل وبالتالي تكون المجموعة $D \times D$ قابلة للعد. كلاً من ٣و ٤ نتركه كتمرين للقارئ. ◦

## ١-٥. بعض الخواص للأعداد الصحيحة.

كثيراً ما نستخدم في الجبر المجرد خواص الأعداد الصحيحة وفي هذه الفقرة سوف ندرس بعض هذه الخواص. وجدنا في الفقرة (١-١) أن كل مجموعة جزئية وغير خالية من $N^*$ تحوي عنصراً أصغرياً أو أصغراً ($N^*$ مجموعة مرتبة كلياً ). يمكننا صياغة هذه الحقيقة بشكل آخر.

**نتيجة.**

كل مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة الموجبة تحوي عنصراً أصغراً.

بما أن مفهوم قابلية القسمة يلعب دوراً أساسياً في نظرية الأعداد، لأجل ذلك سوف نبدأ بالتعريف التالي:

**تعريف.**

ليكن $a,b \in Z$ بحيث $b \neq 0$.

- نقول إن $b$ قاسم للعدد $a$ في $Z$ إذا وجد $q \in Z$ يحقق $a = bq$.

- نقول عن $p \in Z$ إنه عدد أولي إذا كان $p > 1$ وكانت مجموعة قواسمه هي $\{1,-1,p,-p\}$.
- نقول عن $s \in Z$ إنه مضاعف للعدد $t \in Z$ إذا وجد $u \in Z$ يحقق $s = ut$.

كما ذكرنا، أن مفهوم قابلية القسمة يعد أحد أهم خواص الأعداد الصحيحة وهذا المفهوم سوف تحدده لنا المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١-٥-١. ( خوارزمية القسمة ).**

ليكن $a,b \in Z$ بحيث $b > 0$ عندئذ يوجد $q,r \in Z$ بحيث $a = qb + r$ وأن $0 \le r < b$. زد على ذلك فإن $q,r$ يتعينان بشكل وحيد.

**البرهان.**

لنأخذ المجموعة

$$S = \{a - kb: \quad k \in Z, \quad a - kb \ge 0\}$$

نميز حالتين:

- الحالة الأولى: $0 \in S$. في هذه الحالة واضح أن $S \ne \Phi$ وبالتالي يوجد $k_0 \in Z$ بحيث $a - k_0 b = 0$ أي أن $a = k_0 b$، ومنه العدد $b$ قاسم للعدد $a$. وهنا نأخذ $q = k_0$ و $r = 0$. والمبرهنة صحيحة في هذه الحالة.
- الحالة الثانية: $0 \notin S$. لنبرهن في هذه الحالة أن $S \ne \Phi$. سوف نميز الحالات التالية:
  - إذا كان $a > 0$ فإن $a - ob > 0$ وبالتالي $a - 0b \in S$.
  - إذا كان $a < 0$ فإن $a - (2a)b = a(1-2b) > 0$ وبالتالي $a - (2a)b \in S$.
  - إذا كان $a = 0$ فإن $0 - (-1)b > 0$ وبالتالي $-(-1)b \in S$.

مما سبق نجد أن $S \ne \Phi$ كما أن $S \subseteq N^*$ ومنه $S$ تحوي عنصراً أصغراً، وليكن $r = a - qb$ وبالتالي $a = qb + r$ حيث $r > 0$. لنبرهن على أن $r < b$. لنفرض جدلاً أن $r > b$ عندئذ $a-(q+1)b = a - qb - b = r - b > 0$ وبالتالي $a-(q+1)b \in S$ وأن $a-(q+1)b < a - qb = r$ وهذا يناقض كون $r$ عنصراً أصغراً في $S$. إذا



كان $r = b$ فإنه في هذه الحالة يكون $a = (1-q)b$ أي أن $a-(1-q)b \in S$ وأن $a-(1-q)b = 0$ وهذا يناقض كون $0 \notin S$. مما سبق نجد أن $0 \le r < b$.

برهان الوحدانية. لنفرض أن $a = qb + r$ وأن $a = q_1 b + r_1$ حيث $0 \le r < b$ و $0 \le r_1 < b$ وأن $r_1, q_1 \in Z$. ومنه $qb + r = q_1 b + r_1$ و بفرض أن $r_1 \ge r$ نجد $b(q - q_1) = r_1 - r$ أي أن $b$ قاسم للعدد $r_1 - r$. ولكن $0 \le r_1 - r < b$. وهذا يبين لنا أن $r_1 - r = 0$ وبالتالي $r = r_1$ وكذلك $q = q_1$. ∘

**ملاحظة.**

المبرهنة السابقة تبقى صحيحة إذا كان $b < 0$ وفي هذه الحالة يكون $a = qb + r$ حيث $0 \le r < |b|$. نسمي $a$ المقسوم ونسمي $b$ المقسوم عليه ونسمي $q$ ناتج (خارج القسمة وأخيراً نسمي $r$ باقي القسمة.

نأتي الآن لدراسة خاصة جديدة للأعداد الصحيحة وهي القاسم المشترك الأعظم لعددين.

**تعريف. (القاسم المشترك الأعظم).**

ليكن $a,b$ عددين صحيحين مغايرين للصفر. القاسم المشترك الأعظم للعددين $a$ و $b$ هو أكبر عدد صحيح موجب يقسم كلاً من $a$ و $b$ في آن واحد. ونرمز له $\gcd(a,b)$.

إذا كان $\gcd(a,b)=1$ نقول في هذه الحالة إن العددين $a$ و $b$ أوليين فيما بينهما.

المبرهنة التالية تثبت لنا أن القاسم المشترك الأعظم لأي عددين صحيحين مغايرين للصفر موجود.

**مبرهنة ١-٥-٢.**

ليكن $a,b$ عددين صحيحين مغايرين للصفر. عندئذ يوجد $s,t \in Z$ بحيث $\gcd(a,b) = as + bt$. زد على ذلك فإن $\gcd(a,b)$ هو أصغر عدد صحيح موجب من الشكل $as + bt$.

**البرهان.**

لنأخذ المجموعة

$$S = \{am + bn > 0: \quad m,n \in Z\}$$

من الواضح أن المجموعة $S$ غير خالية، كما أن $S \subset N^*$ وبالتالي فإن المجموعة $S$ تحوي عنصراً أصغراً وليكن $d = as + bt$ حيث $s,t \in Z$. وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r \in Z$ بحيث $a = qd + r$ وأن $0 \le r < d$. لنفرض أن $r > 0$ عندئذ

$$r = a - qd = a - q(as + bt) = a - aqs - qbt = a(1 - qs) + b(-qt) \in S$$

وهذا يناقض كون $d$ عنصراً أصغراً في $S$. ومنه نجد أن $r = 0$ وبالتالي $a = qd$ أي أن $d$ قاسم للعدد $a$. بشكل مشابه نبرهن أن $d$ قاسم للعدد $b$. مما سبق نجد أن $d$ قاسم مشترك للعددين $a$ و $b$.

ليكن $d_0$ قاسماً مشتركاً آخر للعددين $a$ و $b$ عندئذ يوجد $h,k \in Z$ بحيث $a = d_0 h$ و $b = d_0 k$ ومنه

$$d = as + bt = d_0 hs + d_0 kt = d_0 (hs + kt)$$

وهذا يبين لنا أن $d \ge d_0$. مما سبق نجد أن $d$ هو قاسم مشترك أعظم للعددين $a$ و $b$. ◊

توجد خاصة أخرى للأعداد الصحيحة، وهذه الخاصة تسمى المضاعف المشترك الأصغر.

**تعريف.**

المضاعف المشترك الأصغر للعددين المغايرين للصفر $a$ و $b$ هو أصغر عدد صحيح موجب يكون مضاعفاً لكل من العددين $a$ و $b$ في آن واحد. وسوف نرمز له $lcm(a,b)$.

خواص كل من القاسم المشترك الأعظم والمضاعف المشترك الأصغر لعددين والعلاقة بينهما نوردها من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ١-٥-٣.**

لتكن $a$ و $b$ أعداداً صحيحة موجبة، و لنفرض أن $d = \gcd(a,b)$ و $m = lcm(a,b)$. عندئذ القضايا التالية صحيحة:



١- إذا كان $t \in Z$ و يقسم العددين $a$ و $b$ فإن $t$ يقسم $d$.

٢ - إذا كان $s \in Z$ مضاعفاً للعددين $a$ و $b$ فإن $s$ يكون مضاعفاً للعدد $m$.

**البرهان.**

١ - بما أن $d = \gcd(a,b)$ عندئذ يوجد $q,r \in Z$ بحيث $d = aq + br$. لنفرض أن $t$ يقسم كلاً من $a$ و $b$ عندئذ يوجد $t_1, t_2 \in Z$ بحيث $a = t_1 t$ و $b = t_2 t$ ومنه

$$d = t_1 tq + t_2 tr = t(t_1 q + t_2 r)$$

وهذا يبين لنا أن $t$ يقسم $d$.

٢ - بما أن $m = lcm(a,b)$ يوجد $m_1, m_2 \in Z$ بحيث $m = m_1 a$ و $m = m_2 b$. ليكن $s$ مضاعفاً آخر للعددين $a$ و $b$ عندئذ يوجد $n_1, n_2 \in Z$ بحيث $s = n_1 a$ و $s = n_2 b$. وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r \in Z$ بحيث $s = qm + r$ وأن $0 \le r < m$. لنفرض جدلاً أن $r \ne 0$ عندئذ $r = s - qm$ ومنه $r = s - qm = n_1 a - qm_1 a = (n_1 - qm_1)a$

و $r = s - qm = n_2 b - qm_2 b = (n_2 - qm_2)b$

وهذا يناقض كون $m = lcm(a,b)$. مما سبق نجد أن $r = 0$ وبالتالي $s = qm$ أي أن $s$ هو مضاعف للعدد $m$. ◊

**تمهيدية ١-٥-٤.**

أياً كانت الأعداد $a,b,c \in Z$ القضايا التالية متكافئة:

١- $\gcd(a,bc) = 1$.

٢- $\gcd(a,b) = 1$ و $\gcd(a,c) = 1$.

**البرهان.**

(١) ⇐ (٢). لنفرض أن $\gcd(a,bc) = 1$ عندئذ يوجد $s,t \in Z$ بحيث $at + s(bc) = 1$ ومنه $at + b(cs) = 1$ و $at + c(bs) = 1$ وهذا يبين لنا أن $\gcd(a,b) = 1$ وأن $\gcd(a,c) = 1$.

(٢) ⇐ (١). لنفرض جدلاً أن $\gcd(a,bc) = d > 1$ عندئذ فإن $d$ يقسم كلاً من $a$ و $bc$ وبالتالي يوجد $s,t \in Z$ بحيث $a = dt$ و $bc = ds$. من جهة أخرى، بما أن

$\gcd(a,b)=1$ فإنه يوجد $q,r\in Z$ بحيث $aq+br=1$ ومنه $acq+bcr=c$ وبالتالي $d(tq+sr)=c$ وهكذا نجد أن $d$ يقسم كلاً من $a$ و $c$ وهذا يناقض كون $\gcd(a,c)=1$. مما سبق نجد أن $d=1$ .

خاصة أخرى تتعلق بالأعداد الأولية نوردها من خلال التمهيدية التالية و التي تسمى تمهيدية اقليدس.

**تمهيدية ١-٥-٥. ( تمهيدية اقليدس).**

ليكن $p$ عدداً أولياً و $a,b\in Z$. إذا كان $p$ يقسم الجداء $a.b$ عندئذ إما $p$ يقسم $a$ أو $p$ يقسم $b$.

**البرهان.**

لنفرض أن $p$ يقسم الجداء $a.b$ وأن $p$ لا يقسم $a$ عندئذ يوجد $m\in Z$ بحيث $ab=pm$. وبما أن $\gcd(a,p)=1$ نجد أن $as+pt=1$ حيث $s,t\in Z$. وبالتالي فإن $b=abs+bpt$. أي أن $b=p(ms+bt)$ وهذا يبين لنا أن العدد $p$ يقسم $b$.

التمهيدية(١-٥-٥) تملك تعميماً على النحو التالي:

**تمهيدية ١-٥-٦.**

ليكن $p$ عدداً أولياً و $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\in Z$. إذا كان العدد $p$ يقسم الجداء $a_1.a_2.a_3.\cdots.a_n$ فإن $p$ يقسم على الأقل أحد المضاريب $a_i$ حيث $1\le i\le n$.

**البرهان.**

لنفرض أن $p$ يقسم الجداء $a_1.a_2.a_3.\cdots.a_n$ عندئذ يوجد $b\in Z$ بحيث

$$a_1.a_2.a_3.\cdots.a_n=pb$$

لنتبع طريقة الاستقراء في البرهان. من أجل $n=1$ نجد أن $p$ يقسم $a_1$ والتمهيدية صحيحة في هذه الحالة. لنفرض أن التمهيدية صحيحة من أجل $n-1$ ولنبرهن على صحتها من أجل $n$. لدينا $(a_1.a_2.a_3.\cdots.a_{n-1})a_n=pb$ وحسب التمهيدية (١-٥-٥) إما $p$ يقسم $a_n$ أو $p$ يقسم $a_1.a_2.a_3.\cdots.a_{n-1}$. إذا كان $p$ يقسم $a_n$ يتم المطلوب. لنفرض أن $p$ لا يقسم $a_n$ عندئذ $p$ يقسم الجداء $a_1.a_2.a_3.\cdots.a_{n-1}$ وحسب الفرض



الاستقرائي فإن $p$ يقسم أحد المضاريب $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-1}$. وهذا يبين لنا أن العدد $p$ يقسم على الأقل أحد المضاريب $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$.

نأتي الآن لإثبات المبرهنة الهامة التالية والتي تدعى المبرهنة الأساسية في الحساب.

**مبرهنة ١-٥-٧. ( المبرهنة الأساسية في الحساب).**

كل عدد صحيح أكبر من الواحد هو إما عدد أولي أو جداء منته لأعداد أولية وهذا الجداء وحيد. بمعنى أنه إذا كان $n>1$ عدداً صحيحاً وكان

$$n=p_1.p_2.\cdots.p_r \quad \text{و} \quad n=q_1.q_2.\cdots.q_t$$

حيث $p_i$ و $q_j$ أعداد أولية و $1\le i\le r$ و$1\le j\le t$ فإن $r=t$ وبعد إجراء تبديل على الأدلة يكون $p_i=q_i$ وذلك من أجل كل $1\le i\le r$.

**البرهان.**

لنتبع طريقة الاستقراء في البرهان. ليكن $n>1$ عدداً صحيحاً. إذا كان $n=2$ فإن المبرهنة تكون صحيحة وذلك لأن 2 عدد أولي. لنفرض أن $n>2$ ولنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل جميع الأعداد الصحيحة $k$ حيث $2\le k<n$.

إذا كان العدد $n$ أولياً يكون قد تم المطلوب. إذا لم يكن العدد $n$ أولياً عندئذ بالإمكان كتابة العدد $n$ على الشكل $n=ab$ حيث $a,b\in Z$ و $a>1,n>b$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن

$$a=p_1.p_2.\cdots.p_r \quad \text{و} \quad b=q_1.q_2.\cdots.q_s$$

حيث كل من $p_i$ و $q_j$ أعداد أولية و $1\le i\le r$ و $1\le j\le s$ ومنه

$$n=ab=p_1.p_2.\cdots.p_r.q_1.q_2.\cdots.q_s$$

وهذا يبين لنا أنه أمكن كتابة العدد $n$ كجداء منته لأعداد أولية. مما سبق نجد أن المبرهنة صحيحة لأجل $n$ وبالتالي فهي صحيحة لأجل أي عدد صحيح $n>1$. لنبرهن الآن على وحدانية الكتابة. لنفرض أن العدد الصحيح $n>1$ يكتب بطريقتين على النحو

$$n=p_1.p_2.\cdots.p_r=q_1.q_2.\cdots.q_t$$

حيث أن كلاً من $p_i$ و $q_j$ أعداد أولية و $1 \le i \le r$ و $1 \le j \le t$ بما أن $p_1$ عدد أولي و يقسم الجداء $q_1.q_2.\cdots.q_t$ وحسب التمهيدية(١-٥-٦) فإن $p_1$ يقسم أحد المضاريب $q_1,q_2,\cdots,q_t$. لنفرض أن $p_1$ يقسم $q_j$. وبما أن كلاً من $p_1$ و $q_j$ أعداد أولية نجد أن $p_1 = q_j$. ومنه يكون

$$p_2.p_3.\cdots.p_r = q_1.q_2.\cdots.q_{j-1}.q_{j+1}.\cdots.q_t$$

بمتابعة العمل بهذا الشكل عدداً منتهياً من المرات نجد أن $r = t$ وأنه بعد إعادة الترقيم فإن $p_i = q_i$ وذلك لأجل كل دليل $1 \le i \le r$. ◊

## ١-٦. توافق الأعداد الصحيحة.

في هذه الفقرة سوف ندرس واحدة من أهم تطبيقات خوارزمية القسمة.

**تعريف.**

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً وليكن $a,b \in Z$. نقول عن العددين $a$ و $b$ إنهما متطابقان بالمقاس $n$ إذا كان $a-b$ يقبل القسمة على $n$ ونكتب $a \equiv b \bmod -n$. سوف نرمز لباقي قسمة $a$ على $n$ بالرمز $a \bmod -n$.

**مثال.**

$8 \bmod -3 = 2$ و $19 \bmod -3 = 1$ و $23 \bmod -6 = 5$.

من أجل $n = 5$ و $a = 57$ و $b = 37$ فإن $a \equiv b \bmod -5$ لأن $a-b = 57-37 = 20 = 4.5$ ◊

من التعريف ينتج مباشرة ما يلي:

**نتيجة.**

١- إذا كان العدد الصحيح $a$ يقبل القسمة على $n$ فإن $a \equiv 0 \bmod -n$.

٢ - إذا كان باقي قسمة $a$ على $n$ يساوي $r$ فإن $a \equiv r \bmod -n$. ◊

نأتي الآن لدراسة بعض خواص التوافق للأعداد الصحيحة.



**تمهيدية ١-٦-١.**

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً وليكن $a,b \in Z$. الشرط اللازم والكافي كي يكون $a \equiv b \bmod -n$ هو أن يكون باقي قسمة $a$ على $n$ يساوي باقي قسمة $b$ على $n$. أي أن

$$a \bmod -n = b \bmod -n.$$

**البرهان.**

لزوم الشرط. لنفرض أن $a \equiv b \bmod -n$ عندئذ $a-b = tn$ حيث $t \in Z$. من جهة أخرى، حسب خوارزمية القسمة فإنه يوجد $q,q_1,r,r_1 \in Z$ بحيث $a = qn+r$ و $b = q_1n+r_1$ وأن $0 \le r,r_1 < n$. بفرض أن $r > r_1$ عندئذ

$$a-b = (q-q_1)n+(r-r_1)$$

وحسب الفرض فإن $r - r_1 = 0$ وبالتالي $r = r_1$.

كفاية الشرط. لنفرض أن $a = qn+r$ و $b = q_1n+r$ حيث $q,q_1,r \in Z$ و $0 \le r < n$. ومنه $a-b = (q-q_1)n$. وهذا يبين لنا أن $a \equiv b \bmod -n$. ◊

التمهيدية التالية تعطينا خواص علاقة التوافق (≡) على مجموعة الأعداد الصحيحة.

**تمهيدية ١-٦-٢.**

علاقة التوافق (≡) على مجموعة الأعداد الصحيحة هي علاقة تكافؤ.

**البرهان.**

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. أياً كان $a \in Z$ فإن $a-a = 0n = 0$ ومنه $a \equiv a \bmod -n$ و العلاقة (≡) انعكاسية. أياً كان $a,b \in Z$ بحيث $a \equiv b \bmod -n$ فإن $a-b$ يقبل القسمة على $n$ وبالتالي $b-a$ ومنه $b \equiv a \bmod -n$ والعلاقة (≡) تناظرية. أياً كان $a,b,c \in Z$ بحيث

$$a \equiv b \bmod -n \quad \text{و} \quad b \equiv c \bmod -n$$

فإن $a-b = qn$ و $b-c = q_1n$ حيث $q,q_1 \in Z$ ومنه

$$a-c = a-b+b-c = (q+q_1)n$$

أي أن $a \equiv c \ \mathrm{mod}-n$ والعلاقة $(\equiv)$ متعدية. مما سبق نجد أن العلاقة $(\equiv)$ هي علاقة تكافؤ على $Z$. نعين صفوف تكافؤ هذه العلاقة. ليكن $a \in Z$ فنجد أن صف التكافؤ المولد بالعنصر $a$ هو

$$[a]=\{x : x\in Z;\quad x\equiv a \ \mathrm{mod}-n\}$$

وهذا يبين لنا أن

$$[a]=\{x : x\in Z; x-a=\alpha n : \alpha\in Z\}$$

أي أن $[a]=\{x : x\in Z; x=a+\alpha n : \alpha\in Z\}$ وأن مجموعة صفوف تكافؤ هذه العلاقة أو مجموعة الخارج هي $Z/_{\equiv}=\{[0],[1],[2],\cdots,[n-1]\}$. ∘

خواص الجمع و الضرب بالمقاس $n$ نجدها في التمهيدية التالية:

**تمهيدية ١-٦-٣.**

ليكن $n>1$ عدداً صحيحاً. القضايا التالية صحيحة:

١- إذا كان $a_1,a_2,b_1,b_2\in Z$ بحيث $a_1 \ \mathrm{mod}-n = b_1 \ \mathrm{mod}-n$ و $a_2 \ \mathrm{mod}-n=b_2 \ \mathrm{mod}-n$ عندئذ:

$(a_1\pm a_2)\ \mathrm{mod}-n=(b_1\pm b_2)\ \mathrm{mod}-n$.

$a_1.a_2 \ \mathrm{mod}-n = b_1.b_2 \ \mathrm{mod}-n$.

٢- إذا كان $a,b\in Z$ بحيث $a \ \mathrm{mod}-n=b \ \mathrm{mod}-n$ عندئذ:

- أياً كان $m\in Z$ فإن $a^m \ \mathrm{mod}-n=b^m \ \mathrm{mod}-n$.
- أياً كان $k\in Z$ فإن $k.a \ \mathrm{mod}-n=k.b \ \mathrm{mod}-n$.

٣- إذا كان $a,b,c\in Z$ بحيث $(a+b)\ \mathrm{mod}-n=c \ \mathrm{mod}-n$ عندئذ:

$a \ \mathrm{mod}-n=(c-b)\ \mathrm{mod}-n$.

**البرهان.**

سنتركه للقارئ كتمرين. ∘

خواص أخرى ضرورية لنا في المستقبل نوردها في المبرهنة التالية:



**مبرهنة ١-٦-٤.**

ليكن $n>1$ عدد صحيح. القضايا التالية صحيحة:

١- أياً كان $a,b\in Z$ فإن $(a+b)\ \mathrm{mod}-n=a \ \mathrm{mod}-n+b \ \mathrm{mod}-n$.

٢- أياً كان $a,b,s,t\in Z$ بحيث أن $\gcd(s,t)=1$ فإن $a\equiv b \ \mathrm{mod}-st$ عندما و فقط عندما $a\equiv b \ \mathrm{mod}-s$ و $a\equiv b \ \mathrm{mod}-t$.

٣- أياً كان $a,b\in Z$ فإن $(a.b)\ \mathrm{mod}-n=(a \ \mathrm{mod}-n).(b \ \mathrm{mod}-n)$.

**البرهان.**

١- لدينا حسب خوارزمية القسمة $a=q_1n+r_1$ و $b=q_2n+r_2$ حيث $q_1,q_2,r_1,r_2\in Z$ وأن $0\le r_1,r_2<n$. ومنه

$$a+b=(q_1+q_2)n+(r_1+r_2)$$

وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى: $0\le r_1+r_2<n$. عندئذ

$(a+b)\ \mathrm{mod}-n=r_1+r_2=a \ \mathrm{mod}-n+b \ \mathrm{mod}-n$.

- الحالة الثانية: $n\le r_1+r_2$. بما أن $0\le r_1,r_2<n$ فإن $n\le r_1+r_2<2n$ وبالتالي $0\le r_1+r_2-n<n$ وهذا يبين لنا أن $r_1+r_2=n+(r_1+r_2-n)$ وهكذا

$(a+b)\ \mathrm{mod}-n=(r_1+r_2)\ \mathrm{mod}-n=a \ \mathrm{mod}-n+b \ \mathrm{mod}-n$.

٢ - لزوم الشرط. لنفرض أن $a\equiv b \ \mathrm{mod}-st$ عندئذ $a-b$ يقبل القسمة على $s.t$ وهذا بدوره يؤدي إلى أن $a-b$ يقبل القسمة على $s$ و $t$ في آن واحد. أي أن $a\equiv b \ \mathrm{mod}-s$ و $a\equiv b \ \mathrm{mod}-t$.

كفاية الشرط. لنفرض أن $a\equiv b \ \mathrm{mod}-s$ و $a\equiv b \ \mathrm{mod}-t$ عندئذ يوجد $\gamma,\gamma_1\in Z$ بحيث $a-b=\gamma t$ و $a-b=\gamma_1 s$. وبما أن $\gcd(s,t)=1$ يوجد $\alpha,\beta\in Z$ بحيث $\alpha t+\beta s=1$ ومنه $a-b=(a-b)\alpha t+(a-b)\beta s$ وبالتالي

$$a-b=\alpha\gamma_1(st)+\gamma\beta(st)$$

أي أن $a-b=(\alpha\gamma_1+\gamma\beta)st$ وهذا يبين لنا أن $a-b$ يقبل القسمة على $s.t$. وبالتالي

$.a \equiv b \bmod{-} st$

٣ – لنفـــــرض أن $a = qn + r$ و $b = q_1 n + r_1$ حيـــــث $q, q_1, r, r_1 \in Z$ وأن $0 \le r, r_1 < n$. عندئذ $ab = (qq_1 n + qr_1 + q_1 r)n + rr_1$ وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى: $0 \le r.r_1 < n$. عندئذ

$$(a.b) \bmod{-} n = r.r_1 = (a \bmod{-} n).(b \bmod{-} n).$$

- الحالة الثانية: $n \le r.r_1 < n^2$. عندئذ بالا مكان كتابة $r.r_1$ بالشكل $r.r_1 = q_0 n + r_0$ حيث $q_0, r_0 \in Z$ و $0 \le r_0 < n$ ومنه

$$ab = (qq_1 n + qr_1 + q_1 r + q_0)n + r_0$$

وهذا يبين لنا أن $ab \bmod{-} n = r_0 = r.r_1 \bmod{-} n = (a \bmod{-} n).(b \bmod{-} n)$. ◊



# تمـــــاريـــن (١)

١ – من أجل أي عدد صحيح موجب $n$ أثبت أن $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{n}$.

٢ – لتكن $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ أعداداً أولية مختلفة. أثبت أنه أياً كان $1 \le i \le n$ فـــإن العدد $p_i$ لا يقسم المقدار $p_1.p_2.p_3.\cdots.p_n + 1$.

٣ – أثبت أن مجموعة الأعداد الأولية قابلة للعدد.

٤ – نسمي الأعداد التالية $1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$ أعداد فيبونس وتعـــرف بالشـــكل التالي $f_1 = 1$، $f_2 = 1$، $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ وذلـــك أيـــاً كـــان $n \in N^*$. أثبـــت أن $f_n < 2^n$.

٥ – لنأخذ المجموعة $S = \{(x, y): \quad x, y \in R\}$ ولنعرف على S العلاقة $\rho$ بالشكل التالي $\forall (a,b),(c,d) \in S$ فإن $(a,b)\rho(c,d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ أثبت أن العلاقة $\rho$ هي علاقة تكافؤ على S ثم عين صفوف تكافؤ هذه العلاقة ووضـــح المعنى الهندسي لها.

٦ – لنعرف على $R$ العلاقة $\rho$ بالشكل $\forall a, b \in R$ فان $a\rho b \Leftrightarrow a.b \ge 0$. أثبـــت أن العلاقة $\rho$ هي علاقة تكافؤ على R.

٧ – لتكن $M$ مجموعة مرتبة جزئياً. أثبت أن القضيتين التاليتين متكافئتان:

أ – كل مجموعة جزئية وغير خالية من M تملك عنصراً أعظمياً (واحد علـــى الأقل).

ب – كل سلسلة متزايدة $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots$ من عناصر M تنقطع، أي يوجد دليل t يحقق $a_t = a_{t+1} = a_{t+2} = \cdots$.

٨ – لتكن $P$ مجموعة غير خالية و $\rho$ علاقة متعدية معرفة على $P$ وتحقق:

- العلاقة $\rho$ ليست انعكاسية.
- أيا كان $x, y \in P$ بحيث $x\rho y$ فان $y\rho x$ ( $y\rho x$ غير محققة).

لنعرف على المجموعة $P$ علاقة $(\le)$ بالشكل التالي:

$$\forall x, y \in P; \quad x \le y \Leftrightarrow x\rho y \vee y = x$$

أثبت أن العلاقة $(\le)$ هي علاقة ترتيب على $P$.

٩ – لتكن $A, B$ مجموعات مرتبة جزئيا و $f : A \to B$ تماثل وليكن $a \in A$ أثبت أنه:

– إذا كان $a$ عنصراً أصغر ( أكبر ) فان $f(a)$ هو عنصر أصغر ( أكبر ) في $B$.

– إذا كان العنصر $a$ أصغرياً ( أعظمياً ) في $A$ فان $f(a)$ هو عنصر أصغري ( أعظمي ) في $B$.

١٠ – أثبت أنه في أية مجموعة منتهية ومرتبة جزئيا يوجد عنصر أعظمي وآخر أصغري.



# الفصل الثاني

# نظرية الزمر

تعد الزمرة واحدة من أهم البنى الجبرية، وهي تدرس بشكل عام الخواص الجبرية للعمليات الرياضية (جمع وضرب الأعداد، جمع وضرب المتجهات، جمع وضرب المصفوفات الخ). وتاريخياً يعد مفهوم الزمرة أول الأمثلة على البنى الجبرية المجردة التي أصبحت فيما بعد أحد أسس الرياضيات.

## ٢-١. الزمرة والزمرة الجزئية.

**تعاريف.**

١ – لتكن $G$ مجموعة غير خالية. نسمي كل (تابع) تطبيق $G \times G \to G$ قانون تشكيل داخلي على المجموعة $G$. وسوف نستخدم في معظم دراستنا الكتابة الضربية (.) لأجل ذلك القانون.

٢ – البنية الجبرية هي مجموعة غير خالية مزودة بقانون تشكيل داخلي واحد على الأقل.

٣ – نقول عن المجموعة غير الخالية $G$ المزودة بقانون تشكيل داخلي (.) إنها زمرة إذا حققت الشروط التالية:

– **التجميعي.** القانون (.) تجميعي على $G$ أي $\forall a,b,c \in G; (ab)c = a(bc)$.

– **الحيادي.** يوجد في $G$ عنصر $e$ يحقق $\forall a \in G; \quad ae = ea = a$. نسمي العنصر $e$ الحيادي في $G$.

– **المقلوب.** يوجد لكل عنصر $a \in G$ عنصر $b \in G$ يحقق $ab = ba = e$. نسمي العنصر $b$ مقلوب العنصر $a$ ونرمز له $a^{-1}$.

**ملاحظـــات.**

نقول عن الزمرة $G$ التي قانون تشكيلها الضرب (.) إنها زمرة ضـــربية. ونقـول عن الزمرة $G$ التي قانون تشكيلها الجمع (+) إنها زمرة جمعية. إذا كانت $G$ زمـرة ضربية و $a \in G$ و $n$ عدد صحيح موجب فإننا نعرف القوة $a^n$ بأنها عنصر من $G$ من الشكل $a^n = a.a.a.\cdots.a$ حيث عدد المضاريب في الطرف الأيمن يساوي $n$. وتعرف القوة $a^0$ بأنها العنصـــر الحيـــادي فـــي $G$. وإذا كـــان العـــدد الصـــحيح $n$ ســـالباً فإن $a^n = (a^{-1})^{-n}$.

سوف نورد الآن الجدول التالي الذي يبين الرموز المستخدمة في كل مـن الزمـر الضربية و الجمعية.

| | الزمرة الضربية | الزمرة الجمعية |
|---|---|---|
| قانون التشكيل | . | + |
| تشكيل العناصر | $ab$ | $a+b$ |
| الحيادي | 1 أو $e$ | ٠ |
| المقلوب (النظير) | $a^{-1}$ | $-a$ |
| القوة (المضاعف) | $a^n$ | $na$ |
| | $ab^{-1}$ | $a-b$ |

سوف نتفق على أن الزمر التي ندرسها زمراً ضربية ما لم نقل خلاف ذلك، وبشكل صريح.

**تعريـــف.**

نقول عن الزمرة $G$ إنها تبديلية إذا كان قانون التشكيل المعرف عليها تبد يلياً، أي إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall a,b \in G; \quad ab = ba .$$



**أمثلـــة.**

١- مجموعة الأعداد الحقيقية $(R,+)$ و كذلك مجموعة الأعـــداد الصـــحيحة $(Z,+)$ هي زمر بالنسبة إلى عملية جمع الأعداد. بينما $(Z,.)$ ليست زمرة بالنسبة إلـــى عملية ضرب الأعداد. لماذا ؟

٢- المجموعة الجزئية $\{1,-1,i,-i\}$ من مجموعة الأعداد العقديـــة تشـــكل زمـــرة بالنسبة إلى عملية ضرب الأعداد العقدية.

٣- المجموعة

$$M_2(R) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}: \quad a,b,c,d \in R\}$$

زمرة بالنسبة إلى عملية جمع المصفوفات.

٤- المجموعة

$$GL(2,R) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}: \quad ad-bc \neq 0, a,b,c,d \in R\}$$

زمرة بالنسبة إلى عملية ضرب المصفوفات.

٥- المجموعة

$$GL(2,R) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}: \quad ad-bc = 1, a,b,c,d \in R\}$$

زمرة بالنسبة إلى عملية ضرب المصفوفات.

**تمريـــن.**

أوجد العنصر الحيادي والمقلوب (النظير) في كل من الزمر الواردة في المثال السابق، ثم بين أياً من الزمر السابقة تبديلية.

سوف نورد الآن خواص بعض العناصر في الزمرة.

**تمهيديـــة ٢-١-١.**

لتكن $G$ زمرة. القضايا التالية صحيحة:

١ - الحيادي في $G$ وحيد.

٢ – مقلوب أي عنصر في $G$ وحيد.

٣ – قانون الاختصار محقق. أي $\forall a,b,c \in G$ بحيث $ab = ac$ فإن $b = c$. كذلك إذا كان $ba = ca$ فإن $b = c$.

٤ – إذا كان $a \in G$ فإن $(a^{-1})^{-1} = a$.

٥ – إذا كان $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in G$ فإن

$$(a_1.a_2.a_3.\cdots.a_n)^{-1} = a_n^{-1}.a_{n-1}^{-1}.\cdots.a_2^{-1}.a_1^{-1}.$$

**البرهان.**

سوف نتركه كتمريناً للقارئ. ∘

**الزمرة الجزئية.**

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ مجموعة جزئية وغير خالية من $G$. نقول عن $H$ إنها زمرة جزئية من $G$ إذا كانت $H$ بحد ذاتها زمرة بالنسبة إلى العملية المعرفة على $G$.

ينتج مباشرة من التعريف أن كلاً من $\{e\}$، $G$ زمرة جزئية من $G$.

لمعرفة إذا كانت المجموعة غير الخالية $H$ من الزمرة $G$ هي زمرة جزئية، ليس من الضروري التحقق من جميع شروط الزمرة حسب التعريف. المبرهنة التالية تعطينا بعض الاختبارات الأبسط كي تكون المجموعة $H$ زمرة جزئية من $G$.

**مبرهنة ٢-١-٢.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ مجموعة جزئية وغير خالية من $G$. الشروط التالية متكافئة:

١- $H$ زمرة جزئية من $G$.

٢- أياً كان $a,b \in H$ فإن

- $ab \in H$.
- أياً كان $c \in H$ فإن $c^{-1} \in H$.

٣- أياً كان $a,b \in H$ فإن $ab^{-1} \in H$.

**البرهان.**



(١)⇐(٢). ينتج بشكل مباشر من تعريف الزمرة الجزئية.

(٢)⇐(٣). ليكن $a,b \in H$ عندئذ وحسب (٢) فإن $b^{-1} \in H$ وبالتالي $ab^{-1} \in H$.

(٣)⇐(١). بما أن العملية المعرفة على $H$ هي ذاتها العملية المعرفة على $G$ فإن العملية (.) تجميعية على $H$. لنبرهن على أن $e \in H$. بما أن المجموعة $H$ غير خالية فإنه يوجد في $H$ عنصر واحد على الأقل، وليكن $x$. لنضع $a = x$ و $b = x$ فنجد حسب الفرض أن $e = xx^{-1} = ab^{-1} \in H$.

لنبرهن الآن أنه أياً كان $y \in H$ فإن $y^{-1} \in H$. ليكن $y \in H$ لنضع $a = e$ و $b = y$ فنجد أن $y^{-1} = ey^{-1} = ab^{-1} \in H$. أخيراً، وحسب التعريف كي تكون $H$ زمرة جزئية من $G$ بقي أن نبرهن أن $H$ مغلقة بالنسبة إلى العملية (.)، أي يجب أن نبرهن أنه أياً كان $x,y \in H$ فإن $xy \in H$. ليكن $x,y \in H$ ولنضع $a = x$ و $b = y^{-1}$ فنجد حسب الفرض أن $xy = x(y^{-1})^{-1} = ab^{-1} \in H$.

بهذا الشكل نكون قد أثبتنا أن $H$ هي زمرة جزئية من $G$. ∘

**أمثلة.**

١- لتكن $G$ زمرة تبديلية. إن المجموعة

$$H = \{x : x \in G, x^2 = e\}$$

زمرة جزئية من $G$.

بما أن $e^2 = e$ عندئذ $e \in H$ وبالتالي المجموعة $H$ غير خالية. ليكن $x,y \in H$ عندئذ

$$(xy^{-1})^2 = (xy^{-1})(xy^{-1}) = x^2(y^2)^{-1} = ee^{-1} = e$$

وبالتالي $xy^{-1} \in H$. وحسب المبرهنة (٢-١-٢) نجد أن المجموعة $H$ هي زمرة جزئية من $G$.

٢ - لتكن $G$ زمرة تبديلية. إن المجموعة $H = \{x^2 : \; x \in G\}$ زمرة جزئية من $G$.

بما أن $e \in G$ فإن $e^2 \in H$ وبالتالي المجموعة $H$ غير خالية. ليكن $a^2, b^2 \in H$ عندئذ $a,b \in G$ وبالتالي $ab^{-1} \in G$ أي أن $(ab^{-1})^2 \in H$. من جهة أخرى، فإن

$$a^2(b^{-1})^2 = (ab^{-1})(ab^{-1}) = (ab^{-1})^2 \in H$$

وحسب المبرهنة(٢-١-٢) نجد أن المجموعة $H$ زمرة جزئية من $G$.

٣ - ليكن $n \geq 1$ عدد صحيح. عندئذ المجموعة

$$nZ = \{nm: \quad m \in Z\}$$

هي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة $(Z,+)$.

بما أن $nZ = \{0,\pm n,\pm 2n,\pm 3n,\cdots\}$ فإن المجموعة $nZ$ غير خالية. ليكن $nm_1, nm_2 \in nZ$ وبما أن $m_1, m_2 \in Z$ فإن $m_1 - m_2 \in Z$ وبالتالي

$$nm_1 - nm_2 = n(m_1 - m_2) \in nZ$$

وحسب المبرهنة(٢-١-٢) نجد أن المجموعة $nZ$ زمرة جزئية من $Z$.

اختبار آخر للزمرة الجزئية يتعلق بالمجموعات المنتهية نورده من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٢-١-٣.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ مجموعة جزئية منتهية من $G$. الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة $H$ زمرة جزئية من $G$ هو أن يتحقق الشرط التالي:

$$\forall a,b \in H; \quad ab \in H.$$

**البرهان.**

لزوم الشرط. واضح.

كفاية الشرط. لدينا حسب الفرض أن $ab \in H$ وذلك أياً كان $a,b \in H$. وحسب المبرهنة (٢-١-٢) يكفي لإثبات أن المجموعة $H$ زمرة جزئية من $G$ أن نبرهن أنه أيا كان $a \in H$ فإن $a^{-1} \in H$. ليكن $a \in H$. نميز حالتين:

- الحالة الأولى: $a = e$ عندئذ $a^{-1} = a \in H$.
- الحالة الثانية: $a \neq e$. بما أن المجموعة $H$ مغلقة بالنسبة إلى العملية (.) فإن $a, a^2, a^3, \cdots \in H$ ولكون المجموعة $H$ منتهية فإنه يوجد $i, j \in N^*$ بحيث $i \neq j$ وأن $a^i = a^j$. لنفرض أن $i > j$ عندئذ $i - j > 0$. كما أن $a^{i-j} = e$ ولكون $a \neq e$ فإن $i - j > 1$ ومنه $a^{i-j} = aa^{i-j-1} = e$.



وبما أن $i - j - 1 \geq 1$ فإن $a^{-1} = a^{i-j-1} \in H$. وهذا يبين لنا أن المجموعة $H$ زمرة جزئية في $G$.

خواص القوى في الزمرة نوردها من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ٢-١-٤.**

لتكن $G$ زمرة و $a \in G$ وليكن $n, m \in Z$. عندئذ:

١- $e^n = e$.

٢- $a^n a^m = a^{n+m}$.

٣- $(a^n)^m = a^{nm}$.

**البرهان.**

١ - واضح.

٢ - لنميز الحالات التالية:

- **الحالة الأولى:** العددان $n,m$ موجبان. عندئذ:

$$a^n a^m = (\underbrace{a.a.\cdots.a}_{n-once})(\underbrace{a.a.\cdots.a}_{m-once}) = (\underbrace{a.a.\cdots.a}_{(n+m)-once}) = a^{n+m}.$$

- **الحالة الثانية:** كل من $n,m$ أعداد سالبة. عندئذ $n = -r$ و $m = -s$ حيث $r,s$ أعداداً موجبة. ومنه

$$a^n a^m = a^{-r} a^{-s} = (a^{-1})^r (a^{-1})^s = (a^{-1})^{r+s} = a^{-(r+s)} = a^{-r-s} = a^{n+m}.$$

- **الحالة الثالثة:** العددين n,m من إشارتين مختلفتين. لنفرض أن $n > 0$ و $m < 0$. عندئذ $m = -r$ حيث $r$ عدد موجب. ومنه

$$a^n a^m = a^n a^{-r} = a^n (a^{-1})^r$$

وهنا نميز الحالات التالية:

**أولاً:** $n = r$. عندئذ $a^n a^m = a^n (a^{-1})^n = e = a^{n-n} = a^{n-r} = a^{n+m}$.

**ثانياً:** $n > r$. لنفرض أن $n - r = k$ عندئذ $n = k + r$ ومنه

$$a^n a^m = a^{k+r} a^{-r} = (a^k a^r) a^{-r} = a^k (a^r a^{-r}) = a^k e = a^k =$$

$$= a^{n-r} = a^{n+(-r)} = a^{n+m}$$

**ثالثاً:** $n<r$. تبرهن بشكل مشابه للحالة السابقة.

٣ – سوف نميز الحالات التالية.

**الحالة الأولى:** كل من $n,m$ أعداد موجبة. عندئذ

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n.a^n.\cdots.a^n}_{m-once} = \underbrace{\underbrace{(a.a.\cdots.a)}_{n-once}\underbrace{(a.a.\cdots.a)}_{n-once}\cdots\underbrace{(a.a.\cdots.a)}_{n-once}}_{m-once} = a^{nm}$$

**الحالة الثانية:** كل من $n,m$ أعداد سالبة. عندئذ بالمكان كتابة كل من $n,m$ بالشكل $n=-r$ و $m=-s$ حيث $r,s$ أعداد موجبة. ومنه

$$a^n = a^{-r} = (a^{-1})^r = \underbrace{a^{-1}.a^{-1}.\cdots.a^{-1}}_{r-once}$$

وبالتالي

$$(a^n)^m = (\underbrace{a^{-1}.a^{-1}.\cdots.a^{-1}}_{r-once})^{-s} = [(\underbrace{a^{-1}.a^{-1}.\cdots.a^{-1}}_{r-once})^{-1}]^s =$$

$$= [(\underbrace{a.a.\cdots.a}_{r-once})]^s = (a^r)^s = a^{rs}$$

وذلك بالاستفادة من الحالة الأولى. ومنه $(a^n)^m = a^{rs} = a^{(-r)(-s)} = a^{nm}$.

**الحالة الثالثة:** العددين $n,m$ من إشارتين مختلفتين. لنفرض أن $n>0$ و $m<0$ عندئذ $m=-r$ حيث $r$ عدد موجب. ومنه

$$(a^n)^m = (a^n)^{-r} = (\underbrace{a.a.\cdots.a}_{n-once})^{-r} = [(\underbrace{a.a.\cdots.a}_{n-once})^{-1}]^r =$$

$$= (\underbrace{a^{-1}.a^{-1}.\cdots.a^{-1}}_{n-once})^r = [(a^{-1})^n]^r$$

وبالاعتماد على الحالة الأولى نجد $(a^n)^m = (a^{-1})^{nr} = a^{-(nr)} = a^{n(-r)} = a^{nm}$.

أما إذا كان $n<0$ و $m>0$ عندئذ $n=-s$ حيث $s$ عدد موجب. ومنه

$$(a^n)^m = (a^{-s})^m = [(a^{-1})^s]^m = (a^{-1})^{sm} = a^{-nm} = a^{(-s)m} = a^{nm} \,. \circ$$

بعض الزمر الجزئية الهامة والضرورية لنا في دراستنا المقبلة نوردها من خلال المبرهنة التالية:



**مبرهنة ٢-١-٥.**

لتكن $G$ زمرة. عندئذ:

١- أياً كان $a\in G$ فإن المجموعة $\langle a\rangle=\{a^n : n\in Z\}$ هي زمرة جزئية تبديلية في $G$.

٢ – المجموعة $Z(G)=\{a: a\in G;\quad ax=xa\quad \forall x\in G\}$ هي زمرة جزئية تبديلية من $G$ تسمى مركز الزمرة $G$.

٣ – أياً كان $a\in G$ فإن المجموعة $C(a)=\{x: x\in G;\quad ax=xa\}$ هي زمرة جزئية من $G$ تسمى ممركز العنصر $a$ في $G$.

**البرهان.**

١ – لدينا $e=a^0\in\langle a\rangle$. أي أن المجموعة $\langle a\rangle$ غير خالية. ليكن $a^n,a^m\in\langle a\rangle$ عندئذ وحسب التمهيدية (٢-١-٤) فإن

$$a^n(a^m)^{-1}=a^na^{-m}=a^{n-m}\in\langle a\rangle$$

و بالتالي المجموعة $\langle a\rangle$ زمرة جزئية من $G$ وهي تبديلية لأنه وحسب التمهيدية (٢-١-٤) فإن $a^na^m=a^{n+m}=a^{m+n}=a^ma^n$.

٢ – بما أن $ex=xe$ أياً كان $x\in G$ نجد أن $e\in Z(G)$. ليكن $a,b\in Z(G)$. عندئذ أياً كان $x\in Z(G)$ فإن $bx=xb$ وبالتالي $xb^{-1}=b^{-1}x$. كذلك بما أن $a\in Z(G)$ فإن $ab^{-1}=b^{-1}a$ ومنه

$$(ab^{-1})x=a(b^{-1}x)=a(xb^{-1})=(xb^{-1})a=x(b^{-1}a)=x(ab^{-1})$$

وذلك أياً كان $x\in G$. وهذا يبين لنا أن المجموعة $Z(G)$ زمرة جزئية من $G$. واضح حسب التعريف أن $Z(G)$ تبديلية.

٣ – يبرهن بشكل مشابه كما في (٢). ◦

لندرس الآن تأثير عملية التقاطع على الزمر الجزئية وذلك من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ٢-١-٦.**

لتكن $G$ زمرة. إن تقاطع أية جماعة من الزمر الجزئية من $G$ هو زمرة جزئية من $G$.

**البرهان.**

لتكن $\{A_i : \quad i \in I\}$ جماعة من الزمر الجزئية من $G$. إن $\bigcap_{i\in I} A_i$ هو مجموعة جزئية وغير خالية من $G$ لأن $e \in \bigcap_{i\in I} A_i$. ليكن $x,y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ عندئذ أيا كان $i \in I$ فإن $x,y \in A_i$ وبما أن $A_i$ زمرة جزئية من $G$ فإن $x.y^{-1} \in A_i$ وبالتالي $x.y^{-1} \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

وهذا يبين لنا أن $\bigcap_{i\in I} A_i$ هو زمرة جزئية من $G$. ◦

وجدنا حسب التمهيدية السابقة أن تقاطع أي عدد من الزمر الجزئية هو زمرة جزئية فهل هذا صحيح بالنسبة إلى عملية الإجتماع؟. في الحالة العامة يمكننا القول إن اجتماع زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية، وهذا ما سوف يوضحه المثال التالي:

**مثال.**

ليكن $n \ge 1$ عدداً صحيحاً. وجدنا سابقا أن المجموعة $nZ$ هي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة $Z$. ومنه فإن كلاً من $2Z$ و $5Z$ هي زمر جزئية من $Z$. بينما $2Z \cup 5Z$ ليس زمرة جزئية من $Z$ لأن $2,5 \in 2Z \cup 5Z$ بينما $7 = 2+5 \notin 2Z \cup 5Z$. من جهة أخرى، نجد أن المجموعة $2Z \cup 4Z$ تشكل زمرة جزئية من $Z$ لأن $2Z \cup 4Z = 2Z$.

لندرس الآن ومن خلال التمهيدية التالية الشرط الذي من أجله يكون اجتماع أي عدد من الزمر الجزئية هو زمرة جزئية.

**تمهيدية ٢-١-٧.**

لتكن $G$ زمرة و $\Gamma = \{A_i : i \in I\}$ جماعة من الزمر الجزئية من $G$. إذا كانت المجموعة $\Gamma$ مرتبة كلياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء فإن $\bigcup_{i\in I} A_i$ يشكل زمرة جزئية من $G$.



**البرهان.**

واضح أن $\bigcup_{i\in I} A_i$ هو مجموعة جزئية من $G$ وغير خالية. ليكن $x,y \in \bigcup_{i\in I} A_i$ عندئذ يوجد $j,k \in I$ بحيث $x \in A_j$ و $y \in A_k$. وبما أن المجموعة $\Gamma$ مرتبة كلياً، عندئذ إما $A_j \subseteq A_k$ أو $A_k \subseteq A_j$. لنفرض أن $A_j \subseteq A_k$ عندئذ $x,y \in A_k$ وبما أن $A_k$ زمرة جزئية من $G$ نجد أن $x.y^{-1} \in A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. وهذا يبين لنا أن المجموعة $\bigcup_{i\in I} A_i$ تشكل زمرة جزئية من $G$. ◦

المبرهنة التالية تعطينا الشرط اللازم والكافي كي يكون اجتماع زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية:

**مبرهنة ٢-١-٨.**

لتكن $H$ و $K$ زمرتين جزئيتين من الزمرة $G$. عندئذ $K \cup H$ زمرة جزئية من $G$ عندما وفقط عندما $K \subseteq H$ أو $H \subseteq K$.

**البرهان.**

لزوم الشرط. لنفرض أن $K \cup H$ زمرة جزئية من $G$. ولنفرض جدلاً أن $K \not\subset H$ و $H \not\subset K$. عندئذ يوجد $h \in H$ بحيث $h \notin K$ و $k \in K$ بحيث $k \notin H$. ومنه $h,k \in K \cup H$ ولكون الاجتماع $K \cup H$ زمرة فإن $hk \in K \cup H$. لنفرض أن $x = hk$، بما أن $x \in K \cup H$ عندئذ إما $x \in H$ أو $x \in K$. إذا كان $x \in H$ عندئذ $k = h^{-1}x \in H$ وهذا يناقض الفرض. إذا كان $x \in K$ عندئذ $h = xk \in K$ وهذا أيضاً مناقض للفرض. مما سبق نجد أنه إما $K \subseteq H$ أو $H \subseteq K$.

كفاية الشرط. واضح. ◦

## ٢-٢. زمرتا الجمع والضرب بالمقاس $n$.

**الزمرة** $Z_n$. ليكن $n \ge 1$ عدد صحيح. ولنأخذ المجموعة

$$Z_n = \{0,1,2,3,\cdots,(n-1)\}$$

لنعرف على المجموعة $Z_n$ عملية الجمع بالمقاس $n$ والتي سوف نرمز لها بالرمز $\oplus$. والمعرفة بالشكل: أياً كان $a,b \in Z_n$ فإن

$$a \oplus b = (a+b)\bmod-n$$

وبما أن $a+b<2n$ عندئذ يمكن التعبير عن العملية $\oplus$ بالشكل:

$$a \oplus b = \begin{cases} a+b & a+b<n \\ a+b-n & a+b \ge n \end{cases}$$

يتضح من التعريف أن العملية $\oplus$ داخلية، تجميعية و تبديلية. كما أن $Z_n$ تملك عنصر حيادي هو الصفر ولكل عنصر $a \in Z_n$ يوجد نظير هو $n-a$. أي أن $-a=n-a$. وبالتالي فإن $Z_n$ تشكل زمرة تبديلية بالنسبة إلى العملية $\oplus$. هل $Z_n$ بالنسبة إلى العملية $\oplus$ هي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة $Z$ ؟. (علل ذلك).

**تطبيق.**

من أجل $n=6$ فإن $Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$.

| Mod-6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

نلاحظ أن نظير العنصر 1 هو $5=6-1=n-1=-1$. وأن نظير العنصر 2 هو $-2=n-2=4$.



**الزمرة U(n).** $(L.Euler-1761)$.

ليكن $n>1$ عدداً صحيحاً. ولنأخذ المجموعة:

$$U(n)=\{m : m \in N^*;\quad m<n,\quad \gcd(n,m)=1\}.$$

لنعرف على المجموعة $U(n)$ عملية ضرب بالمقاس $n$ التي سوف نرمز لها بالرمز $\otimes$ بالشكل التالي: أيا كان $a,b \in U(n)$ فإن $ab \in Z$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r \in Z$ بحيث $ab=qn+r$ وأن $1 \le r < n$. ولنضع

$$a \otimes b = r = ab \bmod-n$$

فنجد أن العملية $\otimes$ داخلية، تجميعية و تبديلية وأن $U(n)$ تحوي عنصراً حيادياً هو 1 ولكل عنصر مقلوب.

**تطبيق.**

من أجل $n=10$ فإن $U(10)=\{1,3,7,9\}$.

| Mod-10 | 1 | 3 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 7 | 9 |
| 3 | 3 | 9 | 1 | 7 |
| 7 | 7 | 1 | 9 | 3 |
| 9 | 9 | 7 | 3 | 1 |

في هذه الزمرة نجد أن مقلوب العنصر 3 هو 7 أي: $3^{-1}=7$، $7^{-1}=3$، $9^{-1}=9$.

كذلك من أجل $n=14$ فإن $U(14)=\{1,3,5,9,11,13\}$.

| Mod-14 | 1 | 3 | 5 | 9 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 5 | 9 | 11 | 13 |
| 3 | 3 | 9 | 1 | 13 | 5 | 11 |
| 5 | 5 | 1 | 11 | 3 | 13 | 9 |
| 9 | 9 | 13 | 3 | 11 | 1 | 5 |
| 11 | 11 | 5 | 13 | 1 | 9 | 3 |
| 13 | 13 | 11 | 9 | 5 | 3 | 1 |

وهنا نجد أن مقلوب العنصر 3 هو 5 أي: $3^{-1}=5$، $5^{-1}=3$، $9^{-1}=11$، $13^{-1}=13$.

**مبرهنة ٢-٢-١.**

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. ولتكن

$$D = \{1,2,3,\cdots,(n-1)\}$$

الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة $D$ زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس $n$ هو أن يكون العدد $n$ أولياً.

**البرهان.**

**لزوم الشرط.** لنفرض أن $D$ زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس $n$. ولنفرض جدلاً أن العدد $n$ غير أولي عندئذ يوجد $k,t \in Z$ بحيث $n = kt$ وأن $1 < k,t < n$. ومنه $k,t \in D$، وبما أن $n = kt$ نجد أن $k \otimes t = kt \bmod{-n} = 0 \notin D$ أي أن المجموعة $D$ ليست مغلقة وهذا يناقض كونها زمرة. إذاً العدد $n$ أولي.

**كفاية الشرط.** لنفرض أن العدد $n$ أولي. ولنبرهن أن $D = U(n)$. واضح أن $U(n) \subseteq D$. ليكن $a \in D$ عندئذ $1 \le a < n$ أي أن $n$ لا يقسم $a$ وبما أن العدد $n$ أولي فإن $\gcd(a,n) = 1$ وبالتالي $a \in U(n)$. أي أن $D \subseteq U(n)$. مما سبق نجد أن $D = U(n)$ ومنه فإن $D$ هي زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس $n$. ◦

**تمهيدية ٢-٢-٢.**

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً و $k$ قاسماً موجباً للعدد $n$. إن المجموعة

$$U_k(n) = \{x : x \in U(n); \quad x \equiv 1 \bmod{-k}\}$$

زمرة جزئية من الزمرة $U(n)$.

**البرهان.**

واضح أن $1 \in U_k(n)$. وبما أن الزمرة $U(n)$ منتهية فإن المجموعة $U_k(n)$ منتهية أيضاً. وحسب المبرهنة (٢-١-٣) يكفي كي تكون المجموعة $U_k(n)$ زمرة جزئية من $U(n)$ هو أن يتحقق الشرط أياً كان $x, y \in U_k(n)$ فإن $x \otimes y \in U_k(n)$.

ليكن $x, y \in U_k(n)$ عندئذ $x, y \in U(n)$ وأن $x \equiv 1 \bmod{-k}$ و $y \equiv 1 \bmod{-k}$ ومنه $x = \alpha_1 k + 1$ و $y = \alpha_2 k + 1$ حيث $\alpha_1, \alpha_2 \in Z$. ومنه



$$xy = (\alpha_1 k + 1)(\alpha_2 k + 1) = (\alpha_1 \alpha_2 k + \alpha_1 + \alpha_2)k + 1$$

وبما أن $x \otimes y \in U(n)$ وأن $xy \equiv 1 \bmod{-k}$ فإن $x \otimes y \in U_k(n)$. وهكذا فإن $U_k(n)$ زمرة جزئية من $U(n)$. ◦

**تطبيق.**

من أجل $n = 21$ و $k = 3$ فإن

$$U_3(21) = \{1,4,10,13,16,19)$$

هي زمرة جزئية من $U(21)$.

## ٢-٣. المرافقات و الدليل و مبرهنة لاغرانج.

لنتعرف في البداية على جداء المجموعات في الزمرة.

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $A,B$ مجموعتين جزئيتين وغير خاليتين من $G$. إن جداء المجموعتين $A,B$ يرمز له $A.B$ ويعرف بالشكل التالي:

$$AB = \{ab: \quad a \in A, b \in B\}$$

إذا كانت $A = \{a\}$ عندئذ

$$AB = aB = \{ab: \quad b \in B\}$$

بشكل مشابه، إذا كانت $B = \{b\}$ فإن

$$AB = Ab = \{ab: \quad a \in A\}$$

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. وليكن $a,b \in G$ نسمي المجموعة

$$a.H = \{ah: \quad h \in H\}$$

مرافقة يسارية للزمرة الجزئية $H$ في $G$.كما نسمي المجموعة

$$H.b = \{hb: \quad h \in H\}$$

مرافقة يمينية للزمرة الجزئية $H$ في $G$.

مثـــال.

في الزمرة $Z_9$ لنأخذ الزمرة الجزئية $H=\{0,3,6\}$. إن المرافقات اليسارية للزمـــرة الجزئية $H$ في $Z_9$ هي:

$$0+H=\{0,3,6\}=3+H=6+H$$

$$1+H=\{1,4,7\}=4+H=7+H$$

$$.2+H=\{2,5,8\}=5+H=8+H$$

في المثال السابق وجدنا أن المرافقتين اليساريتين $3+H$ و $6+H$ متساويتان. فهل هذا صحيح في الحالة العامة؟. وإذا كانت الإجابة بالنفي فهل تحوي المرافقات اليسارية غير المتساوية عناصر مشتركة؟.

أيضاً، في المثال السابق وبما أن الزمرة $Z_9$ تبديلية فإن $6+H=H+6$. فهـل هـذا يبقى صحيحاً في الحالة العامة؟. الإجابة عن هذه التساؤلات و تساؤلات أخرى نجدها في المبرهنة التالية والتي تعطينا خواص المرافقات اليسارية.

مبرهنـــة ٢-٣-١.

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$، وليكن $a,b\in G$. القضايا التالية صحيحة:

١- $a\in aH$.

٢- $aH=H$ عندما وفقط عندما $a\in H$.

٣- إما $aH=bH$ أو $aH\cap bH=\Phi$.

٤- $aH=bH$ عندما وفقط عندما $a^{-1}b\in H$.

٥- $CardaH=CardbH=CardH$.

٦- $aH$ زمرة جزئية من $G$ عندما وفقط عندما $a\in H$.

٧- $H=aHa^{-1}$ عندما وفقط عندما $aH=bH$.

٨- بفرض أن $M_l=\{aH:\ a\in G\}$ و $M_r=\{Ha:\ a\in G\}$ عندئذ

$CardM_l=CardM_r$

٩- كل من $M_l$ و $M_r$ تشكل تجزئة للمجموعة $G$.



البرهـــان.

١ - $a=ae\in aH$.

٢ - لنفرض أن $aH=H$. عندئذ أيا كان $h\in H$ يوجد $h_0\in H$ بحيث $h=ah_0$ ومنه $a=hh_0^{-1}\in H$ وبالتالي $a\in H$.

لنفرض أن $a\in H$. عندئذ $aH\subseteq HH=H$. من جهة أخرى، أياً كان $h\in H$ فـإن $h=a(a^{-1})\in aH$ أي أن $H\subseteq aH$ ومنه $aH=H$.

٣ - إذا كان $aH\cap bH=\Phi$ يتم المطلوب. لنفرض أن $aH\cap bH\neq\Phi$ عندئذ يوجد $x\in aH\cap bH$ وبالتـــالي فـإن $x=ah_1=ah_2$ حيـث $h_1,h_2\in H$. وهكـذا فـإن $a=bh_2h_1^{-1}$ وحسب (٢) نجد أن $aH=b(h_2h_1^{-1})H=bH$.

٤ - ينتج مباشرة من الخاصة (٢).

٥ - لنعـرف العلاقـة $f:aH\to bH$ بالشـكل التـالي: أيـا كـان $h\in H$ فإن $f(ah)=bh$. فنجد أن $f$ تقابلاً لأنه أياً كان $h_1,h_2\in H$ فإن

$$ah_1=ah_2\Leftrightarrow h_1=h_2\Leftrightarrow bh_1=bh_2\Leftrightarrow f(ah_1)=f(ah_2).$$

لـيكن $y\in bH$ عندئـذ يوجـد $h\in H$ بحيـث $y=bh$. وبمـا أن $ah\in aH$ فـإن $f(ah)=bh=y$. مما سبق نجد أن $f$ تقابلاً وبالتالي $CardaH=CardbH$. وبمـا أن $e\in H$ فإن $eH=H$ وبالتالي

$$.CardaH=CardbH=CardH$$

٦- لنفرض أن $aH$ زمرة جزئية من $G$ عندئذ $e\in aH$ وبمـا أن $e\in eH$ نجـد أن $aH\cap eH\neq\Phi$ وحسب (٣) نستنتج أن $aH=eH=H$.

لنفرض أن $a\in H$ عندئذ حسب (٢) فإن $aH=H$ وبالتالي $aH$ زمرة جزئية من $G$.

٧ - نتركه للقارئ.

٨ - إن العلاقة $\varphi:M_r\to M_l$ المعرفة بالشكل: أياً كان $Ha\in M_r$ فإن

$$\varphi(Ha)=a^{-1}H$$

تشكل تقابلاً، لأنه أياً كان $Ha,Hb\in M_r$ فإن

$$Ha = Hb \Leftrightarrow H = aHa^{-1} \Leftrightarrow ba^{-1} \in H \Leftrightarrow ba^{-1}H = H \Leftrightarrow a^{-1}H = b^{-1}H \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \varphi(Ha) = \varphi(Hb)$$

ليكن $bH \in M_l$ عندئذ $b^{-1} \in G$ ومنه

$Hb^{-1} \in M_r$ وأن $\varphi(Hb^{-1}) = (b^{-1})^{-1}H = bH$.

٩- ينتج مباشرة من الخاصتين (١) و (٣) ومن أن $G = \bigcup_{a\in G} aH$ .

**ملاحظة.**

المبرهنة السابقة صحيحة من أجل المرافقات اليمينية.

**تعريــف.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$ نســمي $CardM_l$ حيــث $M_l$ مجموعــة المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H$ في $G$ بدليل $H$ في $G$ ويرمز لــه $(G:H)$.

وحسب المبرهنة السابقة فإن $(G:H) = CardM_l = CardM_r$

كذلك نسمي $CardG$ بمرتبة الزمرة $G$ ونرمز لها بالرمز $(G:1)$.

ينتج من هذا التعريف أن $(G:G)=1$ وأن $(G:\{e\}) = (G:1)$.

سوف نورد الآن واحدة من المبرهنات الأساسية والهامة للزمر المنتهية والتي أثبتها لاغرانج *Lagrange* عام ١٧٧٠ وعدت لأكثر من مئتي عام أهم مبرهنــات نظريــة الزمر.

**مبرهنــة ٢-٣-٢.( مبرهنــة لاغرانــج ١٧٧٠).**

لتكن $G$ زمرة منتهية و$H$ زمرة جزئية من $G$. عندئذ: $(G:1) = (G:H)(H:1)$.

أي أن مرتبة أية زمرة جزئية من $G$ تقسم مرتبة الزمرة $G$. كذلك، دليل أيــة زمــرة جزئية من $G$ يقسم مرتبة الزمرة $G$.

**البرهــان.**

لنفرض أن $a_1H, a_2H, \cdots, a_nH$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية $H$ في $G$. و بما أن المجموعة

$$M_l = \{a_iH: \quad 1\le i\le n\}$$



تشكل تجزئة للزمرة $G$ فإن

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_nH$$

ومنه

$$(G:1) = Carda_1H + Carda_2H + \cdots + Carda_nH$$

وبما أن $Carda_iH = CardH$ نجد أن $(G:1) = n.CardH$ أي أن

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$ .

**ملاحظة.**

عكس المبرهنة السابقة غير صحيح. ويعد *Paolo – Ruffini* أول من أورد مثــالاً يثبت صحة ذلك في عام ١٧٩٩.

**مبرهنــة ٢-٣-٣.**

لتكن $G$ زمرة و$H,K$ زمراً جزئية من $G$ بحيث $K \subseteq H$. إذا كــان دلــيلان مــن الأدلة الثلاثة التالية $(G:K)$، $(G:H)$، $(H:K)$ منتهياً عندئذ:

$$(G:K) = (G:H)(H:K)$$

**البرهــان.**

لنفرض أن اثنين من الأدلة $(G:K)$،$(G:H)$،$(H:K)$ منتهياً. عندئذ تكون جميع الأدلة السابقة منتهية. ولنفرض أن $(G:H)=n$ وأن

$$\{x_iH: \quad x_i \in G; \quad 1\le i\le n\}$$

مجموعة كل المرافقات اليسارية المختلفة للزمــرة الجزئيـــة $H$ فـــي $G$. ولنفـــرض أيضاً $(H:K)=m$ وأن

$$\{y_jK: y_j \in H: 1\le j\le n\}$$

مجموعة كل المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية $K$ في $H$. كــذلك، لنفــرض أن $M_l$ مجموعة كل المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية $K$ في $G$ وأن

$$M = \{x_iy_jK: \quad 1\le i\le n; \quad 1\le j\le m\}$$

من الواضح أن $M \subseteq M_l$ لأن كل عنصر من $M$ هو مرافقة يسارية للزمرة الجزئية

$K$ في $G$، وكذلك جميع عناصر $M$ مختلفة لأنه إذا وجد $1\le i'\le n$ و $1\le j'\le m$ بحيث $x_iy_jK = x_{i'}y_{j'}K$ فإن $x_iy_jKH = x_{i'}y_{j'}KH$ وبما أن $K\subseteq H$ نجد $x_iy_jH = x_{i'}y_{j'}H$ ولكون $y_j , y_{j'}\in H$ فإن $x_iH = x_{i'}H$ ومنه $x_i = x_{i'}$ وبالتالي $y_jK = y_{j'}K$ أي أن $y_i = y_{i'}$.

ليكن $gK\in M_l$. بما أن $g\in G=\bigcup_{i=1}^{n} x_iH$ فإنه يوجد دليل $1\le i_0\le n$ بحيث $g\in x_{i_0}H$ وبالتالي $g\in x_{i_0}h_0$ حيث $h_0\in H$. وكذلك، بما أن $h_0\in H=\bigcup_{j=1}^{m} y_jK$ يوجد دليل $1\le j_0\le m$ بحيث $h_0\in y_{j_0}K$ وبالتالي $h_0 = y_{j_0}k_0$ حيث $k_0\in K$. مما سبق نجد

$$gK=(x_{i_0}h_0)K=(x_{i_0}y_{j_0})k_0K=x_{i_0}y_{j_0}K\in M$$

أي أن $M_l\subseteq M$ ومنه $M=M_l$ وبالتالي

$$(G:K) = CardM_l = CardM = nm = (G:H)(H:K).$$ ∘

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة نحصل على النتيجة التالية:

**نتيجة.**

لتكن $G$ زمرة و $n\in N^*$ ولتكن $H_1,H_2,H_3,\cdots,H_n$ زمراً جزئية من الزمرة $G$. إذا كان $H_1\subseteq H_2\subseteq H_3\subseteq\cdots\subseteq H_n$ عندئذ:

$$(H_n:H_1)=(H_n:H_{n-1}).(H_{n-1}:H_{n-2})\cdots(H_2:H_1)$$

خاصة أخرى للأدلة في الزمرة نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٢-٣-٤.**

لتكن $G$ زمرة و $H_1,H_2,H_3,\cdots,H_n$ زمراً جزئية من الزمرة $G$. إذا كان $(G:H_i)$ محدوداً لأجل كل $1\le i\le n$، عندئذ فإن $(G:\bigcap_{i=1}^{n}H_i)$ محدود.

**البرهان.**

لنثبت أولاً صحة المبرهنة من أجل $n=2$.



لتكن $H,K$ زمراً جزئية من الزمرة $G$ وأن كلاً من $(G:H)$ و $(G:K)$ محدود ولنفرض أن $N=K\cap H$ وأن $M_r$ مجموعة المرافقات اليمينية للزمرة $N$ في $K$ وأن $\Im_r$ مجموعة المرافقات للزمرة $H$ في $G$. عندئذ:

$\Im_r=\{Hg:\quad g\in G\}$ و $M_r=\{Na:\quad a\in K\}$.

لنعرف العلاقة $f:M_r\to\Im_r$ بالشكل

$$\forall Na\in M_r;\qquad f(Na)=Ha$$

فنجد أن $f$ تطبيق، لأنه أيا كان $Na,Nb\in M_r$ بحيث $Na=Nb$ وحسب المبرهنة (٢-٣-١) نجد أن $ab^{-1}\in N$ وبما أن $N\subseteq H$ فإن $ab^{-1}\in H$ أي أن $Ha=Hb$. وبالتالي $f(Na)=f(Nb)$. بطريقة مشابهة نجد أن التطبيق $f$ متباين، ومنه

$$CardM_r\le Card\Im_r=(G:H)$$

وبما أن $(G:H)$ محدود فإن المجموعة $M_r$ منتهية وبالتالي يكون $(K:N)$ محدود.

وبما أن $N\subseteq K$ وحسب المبرهنة (٢-٣-٣) فإن

$$(G:N)=(G:K)(K:N)$$

ولكون كل من $(K:N)$ و $(G:K)$ محدود يكون $(G:N)$ أيضا محدود.

لنثبت الآن بطريقة الاستقراء صحة المبرهنة من أجل $n$. من أجل $n=1$ المبرهنة صحيحة. كذلك من أجل $n=2$ وجدنا أن المبرهنة أيضا صحيحة. لنفرض الآن $n>2$ وأن المبرهنة صحيحة من أجل كل $n>m$. بفرض أن $N=\bigcap_{i=1}^{n-1}H_i$ فنجد حسب الفرض الاستقرائي أن $(G:N)$ محدود وبالتالي يكون $(G:N\cap H_n)$ أيضا محدوداً كما أثبتنا سابقا. مما سبق نجد أن $(G:\bigcap_{i=1}^{n}H_i)$ محدود. ∘

## تمـــاريـــن محـــلولـــة ( ٢ )

١. لتكن $n,k,m$ أعداداً صحيحة موجبة. ولنفرض أن $m$ يقسم $k$ و $k$ يقسم $n$. أثبت أن $U_k(n)$ زمرة جزئية من $U_m(n)$.

**الحـــل.**

بما أن $m$ يقسم $k$ و $k$ يقسم $n$ يوجد $s,t\in Z$ بحيث $k=sm$ و $n=tk$ ومنه $n=tsm$، أي أن $m$ يقسم $n$. بما أن كلاً من $m$ و $k$ قواسم للعدد $n$ فانه حسب التمهيدية (٢-١-١) كلاً من $U_k(n)$ و $U_m(n)$ زمر جزئية من $U(n)$. وبالتالي يكفي كي تكون $U_k(n)$ زمرة جزئية من $U_m(n)$ أن نبرهن أن $U_k(n)\subseteq U_m(n)$. ليكن $y\in U_k(n)$ عندئذ $y\in U(n)$ و يحقق $y\equiv 1\mod -k$ وبالتالي يوجد $\alpha\in Z$ بحيث $y=\alpha k+1$ ومنه $y=\alpha sm+1$ أي أن $y\equiv 1\mod -m$ وبالتالي $y\in U_m(n)$. وهذا يبين لنا أن $U_k(n)\subseteq U_m(n)$ أي أن $U_k(n)$ زمرة جزئية من $U_m(n)$ ٥.

٢. لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. عندئذ أيا كان $a\in G$ فان:

أ- المجموعة $aHa^{-1}$ زمرة جزئية من $G$ تسمى الزمرة المرافقة للزمرة $H$.

ب- إذا كانت الزمرة $H$ تبديلية فان الزمرة $aHa^{-1}$ أيضا تكون تبديلية.

**الحـــل.**

أ- واضح أن $aHa^{-1}\neq\Phi$. ليكن $x,y\in aHa^{-1}$ عندئذ يوجد $h_1,h_2\in H$ بحيث $x=ah_1a^{-1}$ و $y=ah_2a^{-1}$ ومنه

$$xy^{-1}=(ah_1a^{-1})(ah_2a^{-1})=(ah_1a^{-1})(ah_2^{-1}a^{-1})=ah_1h_2^{-1}a^{-1}$$

وبما أن $H$ زمرة جزئية فان $h_1h_2^{-1}\in H$ وبالتالي $xy^{-1}=a(h_1h_2^{-1})a^{-1}\in aHa^{-1}$.

ب - واضح أنه إذا كانت $H$ تبديلية فان $xy=yx$ وذلك أياً كان $x,y\in aHa^{-1}$ ٥.

٣. لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. إن المجموعة



$$C(H)=\{x:x\in G;\quad xh=xh:\quad \forall h\in H\}$$

تشكل زمرة جزئية من $G$ تسمى ممركز الزمرة $H$ في $G$.

**الحـــل.**

واضح أن $C(H)\neq\Phi$ لأن $e\in C(H)$. ليكن $x,y\in C(H)$ عندئذ: أياً كان $h\in H$ فان $xh=hx$ و $yh=hy$ ومنه $y^{-1}h=hy^{-1}$ وبالتالي

$$(xy^{-1})h=x(y^{-1}h)=x(hy^{-1})=(xh)y^{-1}=(hx)y^{-1}=h(xy^{-1})$$

وهذا يبين لنا أن $xy^{-1}\in C(H)$. أي أن $C(H)$ زمرة جزئية من $G$ ٥.

٤. لنفرض أن $H=\{x:x\in U(20):\quad x\equiv 1\mod -3\}$. هل $H$ زمرة جزئية من الزمرة $U(20)$؟

**الحـــل.**

لدينا $U(20)=\{1,3,7,9,11,13,17,19\}$ وأن $H=\{1,7,13,19\}$. نلاحظ أن $13\in H$ بينما $13.13\notin H$. وبالتالي $H$ ليست زمرة جزئية من $U(20)$ ٥.

٥. لتكن $G$ زمرة تبديلية و $n\in Z$. أثبت أن المجموعة $K=\{x:x\in G;x^n=e\}$ زمرة جزئية من $G$.

**الحـــل.**

واضح أن المجموعة $K$ غير خالية. ليكن $x,y\in G$ عندئذ

$$(xy^{-1})^n=x^n(y^{-1})^n=x^n(y^n)^{-1}=e$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة $K$ زمرة جزئية من $G$ ٥.

٦. لتكن $S$ مجموعة غير خالية مزودة بعملية تجميعية (.) تحقق قانون الاختصار من اليمين واليسار،(أي أنه أياً كان $x,y,z\in S$ بحيث $xy=xz$ أو $yx=zx$ فإن $y=z$) ولنفرض أنه أياً كان $a\in S$ فإن المجموعة $\{a^k:\quad k=1,2,\cdots\}$ منتهية. أثبت أن $(S,.)$ زمرة.

**الحـــل.**

ليكن $a \in S$. بما أن المجموعة $\{a^k: \quad k = 1,2,\cdots\}$ منتهية يوجد $n,m \geq 1$ بحيث $n \neq m$ وأن $a^n = a^m$. لنفرض أن $m > n$ عندئذ $a^{m-n+1}.a^m = aa^n$ وحسب قانون الاختصار فإن $aa = a^{m-n+1}$. لنفرض أن $r(a) = m-n+1 > 1$ ومنه أياً كان $x \in S$ فإن $aa^{r(a)-1}x = a^{r(a)}x = ax$ وبالتالي $a^{r(a)-1}x = x$. بشكل مشابه نجد أن $xa^{r(a)-1} = x$ وهذا يبين لنا أن $a^{r(a)-1} = e$ هو عنصر حيادي في $S$ وهذا الحيادي وحيد. إذا كان $r(a) = 2$ عندئذ $a^2 = a = e$ أي أن $a = a^{-1}$. إذا كان $r(a) > 2$ عندئذ $a^{r(a)-2}a = e$ أي أن $a^{r(a)-2}$ مقلوب للعنصر $a$. مما سبق نجد أن $(S,.)$ زمرة. ه



## تمـــــارين ( ٢ )

١- انقل العبارات التالية من الزمرة الضربية إلى الزمرة الجمعية.

- $a^2b^3$.
- $a^{-2}(b^{-1}c)^2$.
- $(ab^2)^{-3}c^2 = e$.

٢- لتكن $G$ زمرة و $a,b \in G$ وليكن $n \in Z$. أثبت أن $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$.

٣- أوجد مقلوب العنصر $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ في $GL(2, Z_{11})$.

٤- ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. أثبت أن الزمرة $U(n)$ تحوي عنصرين على الأقل يحققان $x^2 = 1$.

٥- لتكن $G$ زمرة تبديلية و $a,b \in G$. أثبت أنه أياً كان العدد الصحيح $n$ فإن $(ab)^n = a^n b^n$.

٦- أثبت أن الشرط اللازم و الكافي كي تكون الزمرة $G$ تبديلية هو أن يتحقق الشرط التالي: أياً كان $a,b \in G$ فإن $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

٧- أثبت أن الزمرة $G$ تكون تبديلية في كل من الحالات التالية:

- $\forall a,b,c \in G: \quad ab = ca \quad \Rightarrow \quad b = c$.
- $\forall a,b \in G: \quad (ab)^2 = a^2b^2$.
- $\forall a \in G; \quad a^2 = e$.

٨- أثبت أن المجموعة $\{1,2,3\}$ لا تشكل زمرة بالنسبة إلى لعملية الضرب بالمقاس 4. بينما المجموعة $\{1,2,3,4\}$ هي زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 5.

٩- لتكن $G$ زمرة. أثبت أن $Z(G) = \bigcap_{a \in G} C(a)$.

١٠- لتكن $G$ زمرة و $a \in G$. أثبت أن $C(a) = C(a^{-1})$.

١١- عين كلاً من الزمر التالية: $U_4(20)$، $U_5(20)$، $U_5(30)$، $U_{10}(30)$.

١٢- في الزمرة $G = CL(2,R)$ أوجد $C(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$ ، $C(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$ ، $Z(G)$.

١٣- أثبت أنه إذا كانت الزمرة $G$ تبديلية فإن $Z(G) = G$.

١٤- لتكن $G$ زمرة و $a \in G$. أثبت أن الزمرة $\langle a \rangle$ هي زمرة جزئية من $C(a)$.

١٥- لتكن $G$ زمرة تبديلية وليكن $n$ عدد صحيح موجب. أثبت أن المجموعة $G^n = \{g^n : \quad g \in G\}$.

١٦- لتكن $G$ زمرة تبديلية وليكن $n$ عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أن المجموعة

$$H = \{a : a \in G; \quad (ag)^n = g^n ; \quad \forall g \in G\}$$

تشكل زمرة جزئية من $G$.

١٧- ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. أوجد جميع المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = nZ$ في $Z$.

١٨- أوجد جميع المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = 3Z$ في $Z$.

١٩- أوجد جميع المرافقات اليسارية للزمرة $H = \{1,11\}$ في الزمرة $U(30)$.

٢٠- هل تشكل المجموعة $H = \{a + bi : \quad a,b \in R, \quad ab \geq 0\}$ زمرة جزئية من زمرة الأعداد العقدية بالنسبة إلى عملية جمع الأعداد العقدية؟.

٢١- هل تشكل المجموعة $H = \{a + bi : \quad a,b \in R, \quad a^2 + b^2 = 1\}$ زمرة جزئية من زمرة الأعداد العقدية بالنسبة إلى عملية ضرب الأعداد العقدية؟.

# الفصل الثالث

## الزمرة الدوارة

في هذا الفصل سوف نتعرف على الزمرة الدوارة واختباراتها ونتعرف أيضا على خواصها الهامة. لأجل ذلك لابد لنا في البداية من التعرف إلى بعض المفاهيم الأساسية.

### ٣-١. الزمرة الدوارة.

**تمهيدية ٣-١-١.**

لتكن $G$ زمرة و $S$ مجموعة جزئية وغير خالية من $G$. القضايا التالية صحيحة:

١- تقاطع جميع الزمر الجزئية من $G$ التي كل منها يحوي $S$ هو زمرة جزئية من $G$ تحوي $S$ نرمز لها $\langle S \rangle$.

٢- $\langle S \rangle$ أصغر زمرة جزئية من $G$ تحوي $S$.

٣- $\langle S \rangle$ عنصر أصغري في مجموعة الزمر الجزئية من $G$ والتي كل منها يحوي $S$.

**البرهان.**

نتركه تمريناً للقارئ. ∘

**تعريف.**

لتكن $S$ مجموعة جزئية غير خالية من الزمرة $G$. نسمي الزمرة $\langle S \rangle$ الزمرة المولدة بالمجموعة $S$، ونسمي عناصر $S$ مجموعة مولدات الزمرة $\langle S \rangle$. إذا كانت المجموعة $S$ منتهية عندئذ نقول إن الزمرة $\langle S \rangle$ منتهية التوليد . وفي الحالة المعاكسة، نقول إن الزمرة $\langle S \rangle$ غير منتهية التوليد. وإذا كانت $S = \{a\}$ حيث $a \in G$ فإن $\langle S \rangle = \langle a \rangle = \{a^n : \quad n \in Z\}$.

**تعريـــف.**

نقول عن الزمرة $G$ إنها دوارة أو دائرية إذا وجد $a \in G$ بحيث $G=\langle a\rangle$. وفي هذه الحالة، نقول إن الزمرة $G$ مولدة بالعنصر $a$ ونسمي العنصر $a$ مولداً للزمرة $G$.

**تمهيديـة ٣-١-٢.**

لتكن $G$ زمرة و $a\in G$. عندئذ: $\langle a\rangle = \langle a^{-1}\rangle$.

**البرهـان.**

بما أن $\langle a\rangle$ زمرة تحوي العنصر $a$ فإن $a^{-1}\in\langle a\rangle$. من جهة أخرى، بما أن $\langle a^{-1}\rangle$ هي أصغر زمرة جزئية من $G$ تحوي $a^{-1}$ نستنتج أن $\langle a^{-1}\rangle \subseteq \langle a\rangle$. بطريقة مشابهة نبرهن على الاحتواء المعاكس. ∘

**أمثلـة ٣-١-٣.**

١- زمرة الأعداد الصحيحة $Z$ هي زمرة دوارة مولدة بالعنصر 1. أي $Z=\langle 1\rangle = \langle -1\rangle$، لأنه أياً كان $n\in Z$ يمكننا تمييز الحالات التالية:

- إذا كان $n>0$ فإن $n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-once}$.
- إذا كان $n<0$ فإن $n=\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{|n|-once}$.
- إذا كان $n=0$ فإن $n=0.1$.

٢- الزمرة $Z_n=\{0,1,2,3,\cdots,(n-1)\}$ هي زمرة دوارة مولدة بالعنصر 1 أيضاً، لأنه أياً كان $m\in Z_n$ فإن

$$m=m.1=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m-once}$$

أي أن $Z_n=\langle 1\rangle$. وبما أن $-1=n-1$ نجد حسب التمهيدية (٣-١-٢) أن $Z_n=\langle n-1\rangle$. ومنه $Z_n=\langle1\rangle=\langle-1\rangle=\langle n-1\rangle$. على سبيل المثال، من أجل $n=8$ فإن $Z_8=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ وأن

$$Z_8=\langle1\rangle=\langle-1\rangle=\langle n-1\rangle=\langle7\rangle.$$

٣- في الزمرة $U(10)=\{1,3,7,9\}$ نجد أن



$$U(10)=\{3^0,3^1,3^2,3^3\}=\langle3\rangle$$

أيضا نلاحظ أن

$$U(10)=\{7^0,7^1,7^2,7^3\}=\langle7\rangle$$

وهذا يبين لنا أن كلاً من 3,7 هي مولدات للزمرة $U(10)$ وبالتالي فإن الزمرة $U(10)$ هي زمرة دوارة.

٤- في الزمرة $U(8)=\{1,3,5,7\}$ نجد أن

$\langle1\rangle=\{1\}$، $\langle3\rangle=\{1,3\}$، $\langle5\rangle=\{1,5\}$، $\langle7\rangle=\{1,7\}$

وهكذا فإن $\langle a\rangle\neq U(8)$ وذلك أيا كان $a\in U(8)$. وبالتالي $U(8)$ ليست زمرة دوارة.

مما سبق نستنتج أن الزمرة $U(n)$ ليست دوارة في الحالة العامة. ∘

**نتيجـة.**

كل زمرة دوارة هي زمرة تبديلية.

**البرهـان.**

نتركه تمريناً للقارئ. ∘

**تمهيديـة ٣-١-٤.**

لتكن $G$ زمرة دوارة مولدة بالعنصر $a\in G$. أي $G=\langle a\rangle$. إن العلاقة $\phi: Z\to G$ المعرفة بالشكل: أياً كان $n\in Z$ فإن $\phi(n)=a^n$ هي تطبيق غامر.

**البرهـان.**

نتركه للقارئ كتمرين. ∘

المبرهنة التالية تبين لنا متى تكون الزمرة الدوارة غير منتهية.

**مبرهنـة ٣-١-٥.**

لتكن $G$ زمرة دوارة مولدة بالعنصر $a\in G$. أي $G=\langle a\rangle$. القضايا التالية متكافئة:

١- التطبيق $\phi$ المعرف في التمهيدية(٣-١-٤) متباين.

٢- $\forall n,m\in Z:\quad n\neq m;\ \Rightarrow\ a^n\neq a^m$.

٣- $\forall n,m\in Z:\quad a^n=a^m;\ \Rightarrow\ n=m$.

٤- الزمرة $G$ غير منتهية.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). ليكن $n,m\in Z$ بحيث $n\neq m$. ولنفرض جدلاً أن $a^n=a^m$ عندئذ يكون $\phi(n)=\phi(m)$ ولكون التطبيق $\phi$ متبايناً ينتج أن $n=m$ وهذا يناقض الفرض. إذاً $a^n\neq a^m$.

(٢)⇐(٣). واضح.

(٣)⇐(٤). إن الشرط(٣) يبين لنا أن التطبيق $\phi$ متباين ولكونه غامراً حسب التمهيدية(٣-١-٤) نجد أن $\phi$ تقابل وبالتالي تكون $CardZ=CardG$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ غير منتهية.

(٤)⇐(١). لنفرض جدلاً أن التطبيق $\phi$ غير متباين عندئذ يوجد $n,m\in Z$ بحيث $n\neq m$ وأن $\phi(n)=\phi(m)$ أي أن $a^n=a^m$. لنفرض أن $n>m$ عندئذ $n-m>0$. بما أن $a^{n-m}=a^0=e$ فإن المجموعة

$$\Im=\{k:k\in N^*;\quad a^k=e\}$$

غير خالية، وبالتالي فهي تحوي عنصراً أصغر وليكن $t$. إن $a^t=e$. لنبرهن في هذه الحالة أن $G=\{e,a,a^2,\cdots,a^{t-1}\}$.

واضح أن $\{e,a,a^2,\cdots,a^{t-1}\}\subseteq G$.

ليكن $x\in G$ عندئذ $x=a^s$ حيث $s\in Z$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r\in Z$ بحيث $s=qt+r$ وأن $0\le r<t$ ومنه

$$x=a^s=a^{qt+r}=a^{qt}a^r=(a^t)^q a^r=a^r$$

أي أن $x\in\{e,a,a^2,\cdots,a^{t-1}\}$ وهكذا نجد أن $G\subseteq\{e,a,a^2,\cdots,a^{t-1}\}$. مما سبق نجد أن $G=\{e,a,a^2,\cdots,a^{t-1}\}$ أي أن الزمرة $G$ منتهية وهذا يناقض الفرض.

وهكذا فإن التطبيق $\phi$ متباين. ◦

**نتيجة.**

ينتج من المبرهنة السابقة أن كل زمرة دوارة وغير منتهية تكون قابلة للعد.



المبرهنة الأخيرة أوضحت لنا متى تكون الزمرة الدوارة غير منتهية، وهذا يبين لنا أنه إذا لم تتحقق شروط المبرهنة الأخيرة، فإن الزمرة الدوارة تكون منتهية. وفي هذه الحالة يتبادر إلى الذهن ما هي عناصر هذه الزمرة. المبرهنة التالية تجيب عن هذا التساؤل.

**مبرهنة ٣-١-٦.**

لتكن $G$ زمرة دوارة مولدة بالعنصر $a\in G$. أي $G=\langle a\rangle$. القضايا التالية متكافئة:

١- الزمرة $G$ منتهية.

٢- يوجد في $Z$ عناصر $n,m$ بحيث $n\neq m$ وأن $a^n=a^m$.

٣- يوجد في $N^*$ عنصر مثل $k$ يحقق $G=\{e,a,a^2,\cdots,a^{k-1}\}$ وهذه العناصر مختلفة مثنى مثنى.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). ينتج وبشكل مباشر من المبرهنة الأخيرة.

(٢)⇐(٣). ليكن $n,m\in Z$ بحيث $n\neq m$ وأن $a^n=a^m$. لنفرض أن $n>m$ عندئذ $n-m>0$. وبما أن $a^{n-m}=e$ فإن المجموعة

$$\Im=\{t:t\in N^*;\quad a^t=e\}$$

غير خالية وبالتالي فهي تحوي عنصراً أصغر وليكن $k$. إن $a^k=e$. لنبرهن أن $G=\{e,a,a^2,\cdots,a^{k-1}\}$.

واضح أن $\{e,a,a^2,\cdots,a^{t-1}\}\subseteq G$.

ليكن $y\in G$ عندئذ $y=a^s$ حيث $s\in Z$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r\in Z$ بحيث $s=qk+r$ وأن $0\le r<k$ ومنه $a^s=a^{qk+r}=a^{qk}a^r=(a^k)^q a^r=a^r$ أي أن $x\in\{e,a,a^2,\cdots,a^{k-1}\}$ وهكذا نجد أن $G\subseteq\{e,a,a^2,\cdots,a^{k-1}\}$. مما سبق نجد أن $G=\{e,a,a^2,\cdots,a^{k-1}\}$.

لنفرض جدلاً أنه يوجد في $G$ عناصر $a^i,a^j$ تحقق $a^i=a^j$ وأن $i\neq j$. لنفرض أن $i>j$ عندئذ $0<i-j<k$ وأن $a^{i-j}=e$ وهذا يناقض كون $k$ أصغر عدد صحيح

موجب من أجله $a^k = e$. وهكذا، نجد أن جميع عناصر $G$ مختلفة مثنى مثنى.

(٣)⇐(١). واضح. ₀

**تعريف.** لتكن $G$ زمرة و $g \in G$ نسمي أصغر عدد صحيح موجب $n$ من أجله $g^n = e$ بمرتبة العنصر $g$ ونرمز له $o(g)$، ونقول في هذه الحالة إن العنصر $g$ ذو مرتبة منتهية أو محدودة. ونقول عن العنصر $g$ إنه ذو مرتبة غير منتهية إذا كان $g^n \neq e$ وذلك أياً كان $t \in N^*$، ونعبر عن ذلك $o(g) = \infty$.

ينتج من التعريف أنه لإيجاد مرتبة العنصر $g$ من الزمرة $G$ يكفي حساب متتالية الجداءات $g, g^2, g^3, \cdots$ حتى نصل إلى عنصر الوحدة للزمرة $G$ لأول مرة، ويكون في هذه الحالة الأس مساوياً مرتبة العنصر $g$. وإذا لم نحصل على عنصر الوحدة، عندئذ يكون العنصر $g$ ذا مرتبة غير منتهية.

**مثال.**

لنأخذ الزمرة

$$U(15) = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}.$$

بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس 15. لإيجاد مرتبة العنصر 7 نقوم بحساب متتالية الجداءات $7, 7^2, 7^3, \cdots$ فنجد أن

$$7^4 = 1 ، 7^3 = 13 ، 7^2 = 4 ، 7^1 = 7$$

ومنه $o(7) = 4$. كذلك لإيجاد مرتبة العنصر 11 لدينا $11^1 = 11$ ، $11^1 = 1$. إذاً $o(11) = 2$. بشكل مشابه نجد أن $o(4) = 2$ وأن $o(2) = 4$ وأيضاً $o(1) = 1$ ، $o(8) = 4$ ، $o(13) = 4$ ، $o(14) = 2$.

**مثال.**

في الزمرة

$$Z_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

بالنسبة إلى عملية الجمع بالمقاس 10. لإيجاد مرتبة العنصر 2 نقوم بحساب متتالية العناصر $2, 2.2, 3.2, \cdots$ فنجد أن



$$5.2 = 0 ، 4.2 = 8 ، 3.2 = 6 ، 2.2 = 4 ، 1.2 = 2$$

ومنه تكون $o(2) = 5$. بطريقة مشابهة نجد أن

$o(6) = 5$ ، $o(5) = 2$ ، $o(7) = 10$ ، $o(0) = 1$.

**مثال.**

في زمرة الأعداد الصحيحة $Z$ نجد أن كل عنصر من $Z$ مغاير للصفر مرتبته غير منتهية لأنه، أياً كان $0 \neq a \in Z$ فإن كل عنصر من العناصر $a, 2a, 3a, \cdots$ هو عنصر مغاير للصفر.

بعض الخواص لمرتبة العنصر نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٣-١-٧.**

لتكن $G$ زمرة و $a \in G$ مرتبته $n$. القضايا التالية صحيحة:

١- أياً كان العدد الصحيح $s$ حيث $1 \le s \le n$ فإن $o(a^s) = o(a^{n-s})$.

٢- إذا وجد $k \in Z$ بحيث $a^k = e$ فإن $n$ يقسم $k$.

٣- أياً كان العدد الصحيح $t$ الذي يقسم $n$ فإن $o(a^{\frac{n}{t}}) = t$.

٤- إذا كانت $G = \langle a \rangle$ فإن $o(a) = (G:1) = n$.

**البرهان.**

١ - بما أن $o(a) = n$ فإن $a^n = e$ ومنه $a^{n-s} = a^{-s}$ وهذا يبين لنا أن $o(a^s) = o(a^{-s}) = o(a^{n-s})$.

٢ - ليكن $k \in Z$ بحيث $a^k = e$. حسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in Z$ بحيث $k = qn + r$ وأن $0 \le r < n$. لنفرض أن $r \neq 0$ عندئذ

$$a^k = a^{qn+r} = a^{qn}a^r = (a^n)^q a^r = a^r$$

وهكذا نجد $a^r = a^k = e$ وأن $0 < r < n$ وهذا يناقض كون $o(a) = n$. مما سبق نجد أن $r = 0$ وبالتالي $k = qn$، أي أن $n$ يقسم $k$.

٣ - ليكن $t \in Z$ بحيث أن $t$ يقسم $n$. عندئذ $(a^{\frac{n}{t}})^t = a^{\frac{n}{t}t} = e$. ليكن $\beta \in Z$ بحيث

$\beta < t$ ويحقق $(a^{\frac{n}{t}})^{\beta} = e$ عندئذ فإن $a^{\frac{n}{t}\beta} = e$ وأن $\frac{n}{t}\beta < n$ وهذا يناقض كون $o(a) = n$. مما سبق نجد $o(a^{\frac{n}{t}}) = t$.

٤ – لنفرض أن $G = \langle a \rangle$ وأن $(G:1) = m$. حسب المبرهنة (٣-١-٦) فإن

$$G = \{e, a, a^2, \cdots, a^{m-1}\}$$

وحيث إن $m$ هو أصغر عدد صحيح موجب من أجله $a^m = e$. وهذا يبين لنا أن $m = o(a) = n$. ∘

**مثال.**

في الزمرة $Z_6\{0,1,2,3,4,5\}$ بالنسبة إلى عملية الجمع بالمقاس 6 نجد أن كلاً من العنصرين 1,5 مولداً للزمرة $Z_6$. أي $Z_6 = \langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle$ بينما العنصر 2 ليس مولداً لهذه الزمرة. لأن $\langle 2 \rangle = \{0,2,4\} \neq Z_6$.

المبرهنة التالية تعطينا الشرط اللازم والكافي كي تكون عناصر الزمرة الدوارة المنتهية مولدات لها:

**مبرهنة ٣-١-٨.**

لتكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها $n$ مولدة بالعنصر $a$. الشروط التالية متكافئة:

١- $G = \langle a^k \rangle$ حيث $k \in Z$.

٢- $\gcd(n,k) = 1$ أي أن العنصرين $k$ و $n$ أوليان فيما بينهما.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). لنفرض أن $G = \langle a^k \rangle$ حيث $k \in Z$. ولنفرض جدلاً أن $\gcd(n,k) = d > 1$ عندئذ يوجد $s,t \in Z$ بحيث $k = dt$ و $n = ds$. وبفرض أن مرتبة العنصر $a^k$ تساوي $m$ نجد $(a^k)^s = (a^{dt})^s = (a^{ds})^t = s^t = e$ حيث إن $m \le s < n$. وهذا يبين لنا أن العنصر $a^k$ ليس مولداً للزمرة $G$ وهذا يناقض كون $G = \langle a^k \rangle$. مما سبق نستنتج أن $\gcd(n,k) = 1$.



(٢)⇐(١). لنفرض أن $\gcd(n,k) = 1$ عندئذ يوجد $u,v \in Z$ بحيث $1 = un + vk$ ومنه

$$a = a^{un+vk} = (a^n)^u (a^k)^v \in \langle a^k \rangle$$

وهذا يبين لنا أنه أياً كان $s \le n$ فإن . مما سبق نجد أن $G = \langle a^k \rangle$. ∘

من أجل $G = Z_n$ و $a = 1$ فإن المبرهنة الأخيرة تعطينا النتيجة التالية:

**نتيجة.**

في الزمرة $Z_n$ كل عنصر $k \in Z_n$ يكون مولداً للزمرة $Z_n$ عندما وفقط عندما $\gcd(n,k) = 1$.

**مثال.**

لنأخذ الزمرة $Z_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. وجدنا سابقاً أن $Z_8 = \langle 1 \rangle = \langle 7 \rangle$. من جهة أخرى وبالاعتماد على النتيجة الأخيرة، وبما أن $\gcd(3,8) = 1$ و $\gcd(5,8) = 1$ فإن $Z_8 = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle$.

المبرهنة التالية تبين لنا عدد جميع الزمر الجزئية في زمرة دوارة منتهية وكيفية إيجاد هذه الزمر الجزئية.

**مبرهنة ٣-١-٩.**

لتكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دوارة مولدة بالعنصر $a$. القضايا التالية صحيحة:

١- أي زمرة جزئية من $G$ تكون دوارة.

٢- إذا كانت الزمرة $G$ منتهية ومرتبتها $n$ فإن مرتبة أي زمرة جزئية من $G$ تقسم $n$.

٣- إذا كانت الزمرة $G$ منتهية ومرتبتها $n$ وكان $k \in Z$ يقسم $n$ فإنه توجد في $G$ زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها $k$ وهي $\langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$.

**البرهان.**

١- لتكن $H$ زمرة جزئية من $G$. إذا كانت $H = \{e\}$ عندئذ $H = \langle e \rangle$ وبالتالي الزمرة $H$ دوارة. لنفرض أن $H \neq \{e\}$ عندئذ يوجد $x \in H$ بحيث $x \neq e$ وبما أن $x \in G$ فإن $x = a^t$ حيث $t \in Z$ ومنه فإن المجموعة

$$\Im = \{s : s \in N^* : \quad a^s \in H\}$$

غير خالية. وبالتالي فإن المجموعة $\Im$ تحوي عنصراً أصغر، وليكن $k$. وهكذا فإن $a^k \in H$. وهذا يبين لنا أن $\langle a^k \rangle \subseteq H$. ليكن $y \in H$ عندئذ $y \in G$ ومنه يوجد $m \in Z$ بحيث $y = a^m$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r \in Z$ بحيث $m = qk + r$ وأن $0 \le r < k$. لنفرض أن $r \neq 0$ عندئذ

$$a^m = a^{qk+r} = a^{qk}a^r = (a^k)^q a^r$$

وهكذا نجد أن $a^r = a^m a^{-qk} \in H$ وهذا يناقض كون $k$ أصغر عدد صحيح موجب من أجله $a^k \in H$. إذاً $r = 0$ وهذا يبين لنا أن $m = qk$ وبالتالي $y = a^m = a^{qk} = (a^k)^q \in \langle a^k \rangle$. مما سبق نجد أن $H = \langle a^k \rangle$ أي أن الزمرة الجزئية $H$ دوارة.

٢ – إذا كانت الزمرة $G$ منتهية فإن مرتبة أية زمرة جزئية من $G$ تقسم مرتبة الزمرة $G$ وذلك حسب مبرهنة لاغرانج.

٣ – ليكن $k \in Z$ بحيث $k$ يقسم $n$ عندئذ $n = ks$ حيث $s \in Z$ ومنه $(a^{\frac{n}{k}})^k = a^n = e$ وهذا يبين لنا أنه أياً كان $t \in Z$ بحيث $t < k$ فإن $(a^{\frac{n}{k}})^t \neq e$ وان $\langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$ زمرة جزئية من $G$ مرتبتها $k$. لتكن $H$ زمرة جزئية من $G$ مرتبتها $k$ ولنبرهن أن $H = \langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$.

بما أن الزمرة $G$ دوارة، فإنه حسب (١) تكون الزمرة الجزئية $H$ أيضاً دوارة وبالتالي $H = \langle a^m \rangle$ حيث $m$ أصغر عدد صحيح موجب من أجله $a^m \in H$، وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r \in Z$ بحيث $n = qm + r$، وإن $0 \le r < m$. إن $r = 0$ لأنه إذا كان $r \neq 0$ عندئذ $a^n = a^{qm}a^r$ وبالتالي $a^r = a^n a^{-qm} \in H$ حيث $0 < r < m$ وهذا غير ممكن. إذن $r = 0$ وبالتالي $n = qm$ وهكذا فإن

$$k = (H:1) = (\langle a^m \rangle :1) = \frac{n}{m}$$

مما سبق نجد أن $m = \frac{n}{k}$ وبالتالي $H = \langle a^m \rangle = \langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$.

لنورد الآن المثال التالي كتطبيق على المبرهنة الأخيرة.



**مثال.**

لتكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها 30. بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة فإن كل زمرة جزئية من $G$ هي من الشكل $\langle a^m \rangle$ حيث $m$ قاسم للعدد 30. بالإضافة لذلك، إذا كان $k \in Z$ قاسماً للعدد 30 فإنه توجد في $G$ زمرة جزئية وحيدة مرتبتها $k$ وهي بالتحديد $\langle a^{\frac{30}{k}} \rangle$. لنوجد الآن حسب ما ورد أعلاه جميع الزمر الجزئية من $G$ومرتبتها وهذه الزمر هي:

- الزمرة $\langle a \rangle = \{e,a,a^2,a^3,a^4,\cdots,a^{29}\}$ ومرتبتها 30.
- الزمرة $\langle a^2 \rangle = \{e,a^2,a^4,a^6,a^8,\cdots,a^{28}\}$ ومرتبتها 15.
- الزمرة $\langle a^3 \rangle = \{e,a^3,a^6,a^9,a^{12},\cdots,a^{27}\}$ ومرتبتها 10.
- الزمرة $\langle a^5 \rangle = \{e,a^5,a^{10},a^{15},a^{20},a^{25}\}$ ومرتبتها 6.
- الزمرة $\langle a^6 \rangle = \{e,a^6,a^{12},a^{18},a^{24}\}$ ومرتبتها 5.
- الزمرة $\langle a^{10} \rangle = \{e,a^{10},a^{20}\}$ ومرتبتها 3.
- الزمرة $\langle a^{15} \rangle = \{e,a^{15}\}$ ومرتبتها 2.
- الزمرة $\langle a \rangle = \{e\}$ ومرتبتها 1،

**ملاحظة.**

في المبرهنة الأخيرة إذا كانت $G = Z_n$ و $a = 1$ فإننا نحصل على النتيجة الهامة التالية:

**نتيجة.**

ليكن $k \in Z$ بحيث $k$ يقسم $n$. عندئذ الزمرة $\langle \frac{n}{k} \rangle$ هي الزمرة الجزئية الوحيدة في $Z_n$ والتي مرتبتها $k$.

**تطبيق.**

لنوجد جميع الزمر الجزئية في $Z_{30}$ ومراتبها. حسب النتيجة الوردة أعلاه، فإن جميع الزمر الجزئية $Z_{30}$ ومرتبتها هي:

- الزمرة $\langle 1\rangle=\{0,1,2,3,4,\cdots,29\}$ ومرتبتها 30.
- الزمرة $\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8,\cdots,28\}$ ومرتبتها 15.
- الزمرة $\langle 3\rangle=\{0,3,6,9,12,\cdots,27\}$ ومرتبتها 10.
- الزمرة $\langle 5\rangle=\{0,5,10,15,20,25\}$ ومرتبتها 6.
- الزمرة $\langle 6\rangle=\{0,6,12,18,24\}$ ومرتبتها 5.
- الزمرة $\langle 10\rangle=\{0,10,20\}$ ومرتبتها 3.
- الزمرة $\langle 15\rangle=\{0,15\}$ ومرتبتها 2.
- الزمرة $\langle 30\rangle=\{0\}$ ومرتبتها 1.

المبرهنة التالية تعد واحدة من اختبارات الزمرة الدوارة:

**مبرهنة ٣-١-١٠.**

كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي هي زمرة دوارة.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها العدد الأولي $p$. إن $G\neq\langle e\rangle$ ومنه يوجد في $G$ عنصر $a$ بحيث $a\neq e$. لنأخذ الزمرة الجزئية $\langle a\rangle$، بما أن $\langle a\rangle\neq\langle e\rangle$ فإن $G=\langle a\rangle$. لأنه إذا كانت $G\neq\langle a\rangle$ فإن مرتبة الزمرة الجزئية $\langle a\rangle$ تقسم مرتبة الزمرة $G$ (حسب مبرهنة لاغرانج)، وهذا غير ممكن لأن العدد $p$ أولي. مما سبق نجد أن $G=\langle a\rangle$ والزمرة $G$ تكون دوارة. ◦

**تمهيدية ٣-١-١١.**

لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها $n$. القضايا التالية صحيحة:

١- أياً كان $a\in G$ فإن $a^n=e$.

٢- أياً كان $a\in G$ فإن $o(a)$ تقسم $n$.

**البرهان.**

١ - ليكن $a\in G$ مرتبته $k$ عندئذ $a^k=e$. لنأخذ الزمرة الجزئية $\langle a\rangle$. و بما أن

$$(\langle a\rangle:1)=o(a)=k$$



وحسب مبرهنة لاغرانج، فإن العدد $k$ يقسم $n$ ومنه يوجد $s\in Z$ بحيث $n=ks$ ومنه $a^n=(a^k)^s=e^s=e$.

٢ - ليكن $a\in G$ مرتبته $k$. عندئذ فإن الزمرة الجزئية $\langle a\rangle$ مرتبتها $k$ وحسب لاغرانج فإن $k$ يقسم $n$. ◦

وجدنا أنه إذا كانت الزمرة $G$ مولدة بالعنصر $a$، فإن كل عنصر من $G$ يكتب بالشكل $a^n$ حيث $n\in Z$. وهنا يحق لنا التساؤل ما هي عناصر الزمرة $G$ إذا كانت $G=\langle a\rangle$ حيث $S$ مجموعة غير خالية من $G$. المبرهنة التالية تعطينا الإجابة عن هذا التساؤل.

**مبرهنة ٣-١-١٢.**

لتكن $G$ زمرة و $S$ مجموعة جزئية غير خالية من $G$. ولنفرض أن $B$ هي مجموعة الجداءات المنتهية من الشكل $x_1.x_2.x_3.\cdots.x_n$ بحيث $x_i$ أو $x_i^{-1}$ ينتمي إلى $B$ لأجل $1\leq i\leq n$ عندئذ:

١- $B=\langle S\rangle$.

٢- $y\in\langle S\rangle$ عندما وفقط عندما $y=x_{i_1}^{k_1}.x_{i_2}^{k_2}.x_{i_3}^{k_3}.\cdots.x_{i_t}^{k_t}$ حيث $x_{i_j}$ وأن $k_j\in Z$، $1\leq j\leq t$.

**البرهان.**

١ - واضح أن $B\neq\Phi$. ليكن

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,y_1,y_2,y_3,\cdots,y_m\in B$$

عندئذ

$$(x_1.x_2.\cdots.x_n)(y_1.y_2\cdots.y_m)^{-1}=x_1.x_2.\cdots.x_n.y_m^{-1}.y_{m-1}^{-1}.\cdots.y_2^{-1}.y_1^{-1}\in B$$

مما سبق نجد أن $B$ زمرة جزئية من $G$ وتحوي $S$ لأنه أياً كان $x\in S$ فإن $x\in B$. ومنه $\langle S\rangle\subseteq B$. من جهة أخرى، لتكن $H$ زمرة جزئية من $G$ تحوي $S$ عندئذ $B\subseteq H$ لأنه أياً كان $z\in B$ فإن $z=z_1.z_2.z_3.\cdots.z_k$ حيث $z_i\in S$ و $1\leq i\leq k$. وبما أن $S\subseteq H$ فإن $z=z_1.z_2.z_3.\cdots.z_k\subseteq H$. وهذا يبين لنا أن $B\subseteq\langle S\rangle$.

مما سبق نجد أن $B=\langle S\rangle$.

٢ – لزوم الشرط. ليكن $y\in\langle S\rangle$. حسب (١) نجد أن $y=y_1.y_2.y_3.\cdots.y_t$ حيث $y_i\in S$ و $1\le i\le t$.

كفاية الشرط. واضح. ∘

**ملاحظة.**

إن المبرهنة السابقة تبقى صحيحة في حال كون المجموعة $S$ غير منتهية.

واحد من الأسئلة الهامة المتعلقة بالزمر منتهية التوليد هو السؤال التالي: هل كل زمرة جزئية من زمرة منتهية التوليد تكون منتهية التوليد؟ الإجابة في الحالة العامة هو أنه ليس بالضرورة أن تكون الزمر الجزئية لزمرة منتهية التوليد هي زمرة منتهية التوليد. وهنا يبرز سؤال آخر متى يكون ذلك صحيحا. المبرهنة التالية تعطينا الإجابة عن ذلك التساؤل.

**مبرهنة ٣-١-١٣.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. إذا كان $(G:H)$ منته عندئذ الشروط التالية متكافئة:

١ – الزمرة $G$ منتهية التوليد.

٢ – الزمرة الجزئية $H$ منتهية التوليد.

**البرهان.**

لنفرض أن $(G:H)=n$ عندئذ فإن عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H$ في $G$ يساوي $n$. لنفرض أن هذه المرافقات هي $a_1H,a_2H,\cdots,a_nH$ حيث $a_1,a_2,\cdots,a_n\in G$. لنفرض أن $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

(١)⇐(٢). لنفرض أن الزمرة $G$ منتهية التوليد، عندئذ توجد مجموعة منتهية $X\subseteq G$ بحيث $G=\langle X\rangle$. لنفرض أن $X^{-1}=\{x^{-1}:x\in X\}$ فنجد أن المجموعة $X^{-1}$ منتهية وبالتالي تكون المجموعة $\Im=X\cup X^{-1}$ منتهية. ومنه أيا كان $x\in\Im$ و أيا كان $y\in S$ فإن $yx\in G=\bigcup_{i=1}^{n}a_iH$ وبالتالي يوجد دليل $1\le j\le n$ بحيث



$xy\in a_jH$ ومنه يوجد $h_{yx}\in H$ بحيث $yx=a_jh_{yx}$ أي أن $h_{yx}=a_j^{-1}yx$. لنأخذ المجموعة

$$T=\{h_{yx}:\quad y\in S,\quad x\in\Im\}$$

فنجد أن المجموعة $T$ منتهية لأن كلاً من $S,\Im$ مجموعات منتهية. لنبرهن على أن $H=\langle T\rangle$. ليكن $h\in H$ وبما أن $h\in G$ فإن $h=x_1.x\cdots x_m$ حيث $x_i\in X$ و $1\le i\le m$. لنعرف متتالية العناصر $(t_i)$ من عناصر المجموعة $T$ بالشكل $t_1=e$ وأن $x_it_iH=t_{i+1}H$ وذلك أياً كان $i\le m$ فنجد أن

$$t_{m+1}H=x_mt_mH=x_mx_{m-1}t_{m-1}H=x_mx_{m-1}x_{m-2}t_{m-1}H=\cdots=$$
$$=x_mx_{m-1}x_{m-2}\cdots x_2x_1H=hH=H$$

ومنه نجد أن $t_{m+1}=e$ كما أن

$$h=t_1x_1(t_2^{-1}t_2)x_2(t_3^{-1}t_3)x_3\cdots(t_m^{-1}t_m)x_mt_{m+1}^{-1}$$

ومنه

$$h=(t_1x_1t_2^{-1})(t_2x_2t_3^{-1})(t_3x_3t_4^{-1})\cdots(t_mx_mt_{m+1}^{-1})$$

والذي يمثل جداء منتهياً لعناصر من $T$. مما سبق نجد أن $H=\langle T\rangle$.

(٢)⇐(١). لنفرض أن الزمرة الجزئية $H$ منتهية التوليد، عندئذ توجد مجموعة منتهية $Y\subseteq H$ بحيث $H=\langle Y\rangle$ ومنه فإن $G=S.H$ (جداء مجموعات) لأنه وبما أن كلاً من $S,H$ مجموعات جزئية من $G$ فإن $SH\subseteq G$. من جهة أخرى، ليكن $g\in G$ وبما أن $G=\bigcup_{i=1}^{n}a_iH$ يوجد دليل $1\le j\le n$ بحيث $g\in a_jH$ وبالتالي $g\in a_jH\subseteq SH$ أي أن $G\subseteq SH$ ومنه $G=SH$.

لنبرهن على أن $G=\langle S\cup Y\rangle$. بما أن $S\cup Y\subseteq G$ فإن $\langle S\cup Y\rangle\subseteq G$. ليكن $x\in G$ عندئذ $x=sh$ حيث $h\in H,s\in S$ ومنه

$$s\in S\subseteq S\cup Y\subseteq\langle S\cup Y\rangle,\qquad h\in H=\langle Y\rangle\subseteq\langle S\cup Y\rangle$$

أي أن $x=sh\in\langle S\cup Y\rangle$ وبالتالي $G\subseteq\langle S\cup Y\rangle$. مما سبق نجد أن $G=\langle S\cup Y\rangle$.

وبما أن كلاً من المجموعتين $S,Y$ منتهية فإن المجموعة $S\cup Y$ هي مجموعة منتهية وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ منتهية التوليد. ₀

خاصة أخرى من خواص الزمر منتهية التوليد نوردها في المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٣-١-١٤.**

لتكن $G$ زمرة منتهية التوليد. عندئذ $G$ لا يمكن أن تساوي اجتماع لسلسة متزايدة من الزمر الجزئية من $G$ والتي كل منها لا يساوي $G$.

**البرهان.**

لتكن $X$ مجموعة جزئية منتهية من $G$ وغير خالية ولنفرض أن $G=\langle X\rangle$ ولتكن

$$K_1\subseteq K_2\subseteq K_3\subseteq\cdots$$

سلسلة متزايدة من الزمر الجزئية من $G$ والتي كل منها لا يساوي $G$. ولنفرض أن $G=\bigcup_{i=1} K_i$ عندئذ أيا كان $x\in X$ يوجد دليل $i_x$ بحيث $x\in H_{i_x}$. لنضع

$$j=\max\{i_x:\quad x\in X\}$$

عندئذ $\forall x\in X$ فإن $x\in H_j$ ومنه $X\subseteq H_j$ وبالتالي $G=\langle X\rangle\subseteq H_j\subset G$ أي أن $G=H_j$ وهذا غير ممكن. ₀

## ٣-٢. تطبيقات الزمرة الدوارة.

في عام ١٧٦٣ أوجد *L.Euler* طريقة لإيجاد عدد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من $n$ والأولية مع $n$. للتعرف إلى هذه الطريقة لابد لنا من التعريف التالي:

**تعريف.**

لنعرف التابع $\phi:N^*\to N^*$ بالشكل التالي: أياً كان $n\in N^*$ فإن $\phi(n)=1$ عندما $n=1$. إذا كان $n>1$ فإن $\phi(n)=s$ حيث $s$ هو عدد جميع الأعداد $k\in N^*$ حيث $k<n$ وأن $\gcd(n,k)=1$. نسمي التابع $\phi$ تابع أولر.

**مثال.**

إن $\phi(3)=2$ ، $\phi(10)=4$ ، $\phi(12)=4$ ، $\phi(7)=6$.

من التعريف السابق تنتج لدينا الخواص التالية:

**نتيجة.**

ليكن $n>1$ عدداً صحيحاً. عندئذ:

- $\phi(n)=(U(N):1)$ أي أن $\phi(n)$ يساوي مرتبة الزمرة $U(n)$.
- إذا كان $p$ عدداً أولياً فإن $\phi(p)=p-1$.

واحدة من أهم الخواص لتابع أولر أنه يعطينا عدد جميع العناصر التي لها ذات المرتبة في أية زمرة دوارة منتهية. وهذه الخاصة نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٣-٢-١.**

ليكن $n>1$ عدداً صحيحاً. وليكن $d\in N^*$ قاسماً للعدد $n$. إن عدد جميع العناصر التي مرتبتها $d$ في أية زمرة دوارة مرتبتها $n$ يساوي $\phi(d)$.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها $n$. وليكن $d\in N^*$ قاسماً للعدد $n$. عندئذ حسب المبرهنة(٣- ١-٩) يوجد في $G$ زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها $d$ ولتكن $\langle a\rangle$. وأن أي عنصر آخر مرتبته $d$ يكون مولداً للزمرة $\langle a\rangle$. وحسب المبرهنة (٣-١-٨) فإن العنصر $a^k$ يكون مولداً للزمرة $\langle a\rangle$ عندما وفقط عندما $\gcd(k,d)=1$. وهذا يبين لنا أن عدد جميع العناصر التي مرتبة كل منها يساوي $d$ هو $\phi(d)$. ₀

نأتي الآن لإثبات مبرهنة فيرما الأولى التي أثبتها *P. Fermat* عام ١٦٤٠ وهذه المبرهنة لها استخدامات هامة لاختبار بعض الأعداد إن كانت أولية أم لا، وذلك باستخدام الحاسب.

**مبرهنة ٣-٢-٢.**

ليكن $a$ عدداً صحيحاً موجباً و $p$ عدداً أولياً. عندئذ

$$a^p \bmod\text{-}\, p=a \bmod\text{-}\, p$$

البرهـان.

حسب خوارزمية القسمة فإنه يوجد $m,r \in Z$ بحيث $a = mp + r$ وأن $0 \le r < p$ أي أن $a \equiv a \text{ mod-} p$ وحسب التمهيدية (١-٥-٣) فإن

$$a^p \text{ mod-} p = r^p \text{ mod-} p$$

وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $r = 0$ عندئذ $a^p \text{ mod-} p = r^p \text{ mod-} p = r \text{ mod-} p$.
- إذا كان $r \neq 0$ عندئذ $r \in U(p)$ ومنه فإن $r^{p-1} = 1$ وهذا يبين لنا أن $r^p = r$ أي أن $a^p \text{ mod-} p = r^p \text{ mod-} p = r \text{ mod-} p$ .

نأتي الآن لإثبات مبرهنة أولر التي هي تعميم لمبرهنة فيرما الأولى.

**مبرهنة ٣-٢-٣.**

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً و $a$ عدداً صحيحاً موجباً بحيث $\gcd(a,n) = 1$ عندئذ $a^{\phi(n)} \equiv 1 \text{ mod-} n$.

البرهـان.

سوف نميز حالتين: إذا كان $a < n$ عندئذ وبما أن $\gcd(a,n) = 1$ فإن $a \in U(p)$ ومنه $a^{\phi(n)} \equiv 1 \text{ mod-} n$. - إذا كان $a > n$ عندئذ حسب خوارزمية القسمة فإن $a = qn + r$ حيث $q,r \in Z$ وأن $0 < r < n$ لأن $\gcd(a,n) = 1$. وهذا يبين لنا أن $r \in U(p)$ وأن $a \text{ mod-} n = r \text{ mod-} n$ وحسب التمهيدية (١-٥-٣) فإن

$$a^{\phi(n)} \text{ mod-} n = r^{\phi(n)} \text{ mod-} n = 1 \text{ mod-} n$$

أي أن $a^{\phi(n)} \equiv 1 \text{ mod-} n$ .

مثـال.

١ - احسب $5^{15} \text{ mod-} 7$. لدينا حسب مبرهنة أولر $a^{\phi(n)} \equiv 1 \text{ mod-} n$ وبما أن $\phi(7) = 6$ نجد $5^6 \equiv 1 \text{ mod-} 7$ وبالتالي $5^{15} = 5^6.5^6.5^2.5 = 1.1.4.5 = 6 \text{ mod-} 6$ .

٢ - احسب $7^{13} \text{ mod-} 11$. لدينا $\gcd(7,11) = 1$ وأن $\phi(11) = 10$ وحسب مبرهنة أولر فإن $7^{13} = 7^{10}.7^2.7 = 1.5.7 = 2 \text{ mod-} 11$ .



# تمـارين محلولـة (٣)

١ - لتكن $G$ زمرة و $a,b \in G$ بحيث $o(a) = n$ و $o(b) = m$ . عندئذ:

أ - إذا كان $ab = ba$ و $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle e\rangle$ فإن $o(ab) = lcm(n,m)$ .

ب- إذا كان $ab = ba$ و $\gcd(n,m) = 1$ فإن $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle e\rangle$ وأن $o(ab) = o(a).o(b)$ .

الحـل.

أ - لنفرض أن $k = lcm(n,m)$ عندئذ يوجد $s,t \in Z$ بحيث $k = tn$ و $k = sm$ ومنه $(ab)^k = a^k b^k = a^{nt} b^{ms} = e$ لنفرض أن $o(ab) = \lambda$ عندئذ $\lambda \le k$. من جهة أخرى، لدينا $e = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda$ ومنه $a^\lambda = b^{-\lambda} \in \langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle e\rangle$ وهذا يبين لنا أن $\lambda$ يقبل القسمة على $n$ و $m$ في آن واحد، وبالتالي $\lambda \ge k$. مما سبق نجد أن $\lambda = k$ وبالتالي $o(ab) = \lambda = lcm(n,m)$ .

ب - لنفرض أن $ab = ba$ و $\gcd(n,m) = 1$ . ليكن $y \in \langle a\rangle \cap \langle b\rangle$ ، ولنفرض أن $o(y) = s$ عندئذ $y^s = e$ . بما أن $y \in \langle a\rangle$ عندئذ فإن $y^n = e$ ، كذلك بما أن $y \in \langle b\rangle$ فإن $y^m = e$ وهذا يبين لنا أن $s$ يقسم كلاً من $n$ و $m$ وبما أن $\gcd(n,m) = 1$ نجد أن $s = 1$ وبالتالي $y = e$ . أي أن $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle e\rangle$ . وحسب( أ ) فإن

$$o(ab) = lcm(n,m) = nm = o(a)o(b)$$

٢ - لتكن $G$ زمرة منتهية. أثبت أنه يوجد عدد صحيح موجب $n$ يحقق $a^n = e$ وذلك أياً كان $a \in G$ .

الحـل.

لنفرض أن $G = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k\}$ وأن $o(a_i) = n_i$ حيث $1 \le i \le k$ . ولنفرض أن $n = n_1.n_2.n_3.\cdots.n_k$ . فنجد أنه أيا كان $a \in G$ فإن $a^n = e$ .

٣ – لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$، و ليكن $a \in G$. أثبت أنـه إذا كانـت الزمرة $H$ دوارة فإن الزمرة $aHa^{-1}$ أيضاً دوارة.

**الحـل.**

إن $aHa^{-1}$ زمرة جزئية من $G$. لنفـرض أن $H = \langle h \rangle$ حيـث $h \in H$ ولنبـرهن أن $aHa^{-1} = \langle aha^{-1} \rangle$. بمـا أن $aha^{-1} \in aHa^{-1}$ فـإن $\langle aha^{-1} \rangle \subseteq aHa^{-1}$. لـيكن $y \in aHa^{-1}$ عندئذ $y = ah^m a^{-1}$ حيث $m \in Z$ ومنه

$$y = ah^m a^{-1} = (aha^{-1})^m \in \langle aha^{-1} \rangle$$

مما سبق نجد أن $aHa^{-1} \subseteq \langle aha^{-1} \rangle$ وبالتالي فإن $aHa^{-1} = \langle aha^{-1} \rangle$. ◊

٤– لتكن $G$ زمرة تبديلية، و $p$ عدداً أولياً. أثبت أن المجموعة

$$H = \{x : x \in G, \quad o(x) = p^n : \quad n \in N\}$$

زمرة جزئية من $G$.

**الحـل.**

واضح أن $e \in H$ لأن $o(e) = 1 = p^0$. ليكن $x, y \in H$ ولنفـرض أن $o(x) = p^n$ و $o(y) = p^m$ حيـث $n, m \in Z$. لنفـرض أن $n \ge m$. بمـا أن $o(y^{-1}) = p^m$ فإن $(xy^{-1})^{p^n} = x^{p^n}(y^{-1})^{p^n} = e$ وهذا يبين لنا أن $o(xy^{-1}) \le p^n$، وبما أن $o(xy^{-1})$ يقسم $p^n$ فإن $o(xy^{-1}) = p^s$ حيث $1 \le s \le n$ وهذا يبين لنا أن $xy^{-1} \in H$. ◊

٥ – لتكن $G$ زمرة تبديلية. أثبـت أن المجموعـة $K = \{x : x \in G, \quad o(x) \in N^*\}$ زمرة جزئية من $G$. نسمي الزمرة $K$ زمرة الفتل. وتكون $G$ زمرة فتل، إذا كان كـل عنصر من $G$ ذا مرتبة منتهية.

**الحـل.**

واضـح أن $e \in K$ لأن $o(e) = 1$. لـيكن $x, y \in K$ ولنفـرض أن $o(x) = n$ و $o(y) = m$ حيـث $n, m \in Z$. لنفـرض أن $n \ge m$. بمـا أن $o(y^{-1}) = m$ فـإن $(xy^{-1})^{nm} = (x^n)^m[(y^{-1})^m]^n = e$ وهذا يبين لنا أن $o(xy^{-1}) \le nm$ ومنه $xy^{-1} \in K$ أي أن $K$ زمرة جزئية من $G$. ◊



٦ – لتكن $G$ زمرة تبديلية تحوي عنصرين مرتبة كل منهما 2. أثبت أن $G$ تحـوي زمرة جزئية مرتبتها 4.

**الحـل.**

ليكن $a, b \in G$ بحيث $o(a) = o(b) = 2$. لنأخذ المجموعة $K = \{e, a, b, ab\}$. فنجد أنها زمرة جزئية من $G$ مرتبتها 4. لأنه بالاعتماد على الجدول التالي:

| | $e$ | $a$ | $b$ | $ab$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $ab$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $ab$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $ba$ | $e$ | $a$ |
| $ab$ | $ab$ | $b$ | $a$ | $e$ |

نجد أن المجموعة $K$ مغلقة بالنسبة إلى العملية المعرفة على $G$. ◊

٧ – لتكن $G$ زمرة و $a, b \in G$ بحيث $ab = ba$. لنفرض أن $o(a) = n$ و $o(b) = m$. إذا كان $\gcd(n,m) = 1$ عندئذ

$$\langle a.b \rangle = \langle a, b \rangle = \{a^i b^j : \quad 0 \le i < n, \quad 0 \le j < m\}.$$

**الحـل.**

لنبرهن في البداية أن $\langle a.b \rangle = \langle a, b \rangle$. بما أن $a, b \in \langle a, b \rangle$ فإن $ab \in \langle a, b \rangle$ وبمـا أن $\langle a.b \rangle$ أصغر زمرة جزئية في $G$ تحوي $ab$ نجـد أن $\langle a.b \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$. مـن جهـة أخرى، بما أن $\gcd(n,m) = 1$ يوجد $s, t \in Z$ بحيث $1 = nt + ms$ ومنه

$$a = a^1 = a^{nt+ms} = a^{nt}a^{ms} = a^{ms} = a^{ms}b^{ms} = (ab)^{ms} \in \langle ab \rangle$$

بشكل مشابه نجد أن $b \in \langle a.b \rangle$. ومنه $\langle a, b \rangle = \langle a.b \rangle$. مما سبق نجـد $\langle a.b \rangle = \langle a, b \rangle$. ينتج من تعريف الزمرة الدوارة أن

$$\langle a.b \rangle = \{a^i b^j : \quad 0 \le i < n, \quad 0 \le j < m\}. \ ◊$$

٨– لتكن $G$ زمرة و $a \in G$ مرتبته $n$. عندئذ:

أ– $\langle a^k \rangle = \langle a^{\gcd(n,k)} \rangle$.

ب- $o(a^k) = \dfrac{n}{\gcd(n,k)}$.

ت- $\langle a^r\rangle = \langle a^s\rangle$ عندما وفقط عندما $\gcd(n,r) = \gcd(n,s)$.

**الحـــل.**

أ – بما أن $k$ مضاعف للعدد $\gcd(n,k)$ فإن $\langle a^k\rangle \subseteq \langle a^{\gcd(n,k)}\rangle$. من جهة أخرى، يوجد $s,t \in Z$ بحيث $\gcd(n,k) = sn + tk$ ومنه

$$a^{\gcd(n,k)} = a^{sn+tk} = a^{sn}a^{tk} = a^{tk} = (a^k)^t \in \langle a^k\rangle$$

وهذا يبين لنا أن $\langle a^{\gcd(n,k)}\rangle \subseteq \langle a^k\rangle$ مما سبق نجد أن $\langle a^k\rangle = \langle a^{\gcd(n,k)}\rangle$.

ب – بالاعتماد على المبرهنة (٣-١-٧) وحسب (١) نجد أن

$$o(a^k) = o(a^{\gcd(n,k)}) = \frac{n}{\gcd(n,k)}.$$

ت – لنفرض أن $\langle a^r\rangle = \langle a^s\rangle$ وحسب (٢) نجد

$$\frac{n}{\gcd(n,r)} = o(a^r) = o(a^s) = \frac{n}{\gcd(n,s)}$$

وهذا يبين لنا أن $\gcd(n,r) = \gcd(n,s)$. لنفرض أن $\gcd(n,r) = \gcd(n,s)$ عندئذ حسب (١) فإن $\langle a^r\rangle = \langle a^{\gcd(n,r)}\rangle = \langle a^{\gcd(n,s)}\rangle = \langle a^s\rangle$. ₀

٩ – لتكن $G$ زمرة و $a,b \in G$. لنفرض أن $o(a) = 3$ و $o(b) = 2$ وأن $ba^2 = ab$.

عندئذ:

أ- المجموعة $D_3 = \{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}$ زمرة جزئية في $G$.

ب- $D_3 = \langle a,b\rangle$.

ت- $D_3 = \{a^ib^j : \quad 0 \le i < 3 \quad 0 \le j < 2\}$.

**الحـــل.**

أ – بما أن المجموعة $D_3$ منتهية يكفي لإثبات أنها زمرة جزئية من $G$ أن نبرهن أنها مغلقة بالنسبة إلى العملية المعرفة على $G$، وهذا محقق من خلال الجدول التالي:



| . | $e$ | $a$ | $a^2$ | $b$ | $ab$ | $a^2b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $b$ | $ab$ | $a^2b$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $e$ | $ab$ | $a^2b$ | $b$ |
| $a^2$ | $a^2$ | $e$ | $a$ | $a^2b$ | $b$ | $ab$ |
| $b$ | $b$ | $a^2b$ | $ab$ | $e$ | $a^2$ | $a$ |
| $ab$ | $ab$ | $b$ | $a^2b$ | $a$ | $e$ | $a^2$ |
| $a^2b$ | $a^2b$ | $ab$ | $b$ | $a^2$ | $a$ | $e$ |

ب – بما أن $D_3$ زمرة وأن $a,b \in G$ نجـد أن $\langle a,b\rangle \subseteq D_3$. الاحتـواء المعـاكس واضح. مما سبق نجد أن $D_3 = \langle a,b\rangle$.

ت – ينتج وبشكل مباشر من المبرهنة (٣-١-١٢). ₀

## تمارين (٣)

١- أوجد مرتبة كل من الزمر التالية: $U(20)$، $U(12)$، $U(10)$ و $Z_{12}$.

٢- أوجد مرتبة كل عنصر من عناصر الزمر الواردة في التمرين (١).

٣- أثبت أن $U(14)=\langle 3\rangle=\langle 5\rangle$ وأن $Z_{10}=\langle 3\rangle=\langle 7\rangle=\langle 9\rangle$.

٤- أوجد جميع عناصر الزمرة الجزئية $\langle 20\rangle$ في $Z_{30}$.

٥- أثبت أنه من أجل أي عدد صحيح موجب $n$ توجد زمرة دوارة مرتبتها $n$.

٦- أثبت أنه أياً كان $k\in U(20)$ فإن $U(20)\neq\langle k\rangle$.

٧- لتكن $G$ زمرة و $a\in G$. أثبت أن $o(a)=o(a^{-1})$.

٨- لتكن $G$ زمرة و $a\in G$ مرتبته 15. أوجد مراتب العناصر التالية في $G$:

- $a^3,a^6,a^9,a^{12}$.
- $a^2,a^4,a^8,a^{14}$.
- $a^5,a^{10}$.

٩- أثبت أن الزمرة $U(15)$ تحوي 6 زمر جزئية دوارة. أوجد هذه الزمر.

١٠- في الزمرة $U(40)$ أوجد زمرة جزئية دوارة مرتبتها 4 وأخرى ليست دوارة مرتبتها 4 أيضاً ثم أوجد المرافقات اليسارية لهذه الزمر.

١١- أوجد جميع المولدات للزمر $Z_6$، $Z_8$، $Z_{20}$.

١٢- أوجد عناصر الزمر الجزئية $\langle 20\rangle$، $\langle 10\rangle$ في $Z_{30}$.

١٣- أوجد عناصر الزمر الجزئية $\langle 3\rangle$، $\langle 7\rangle$ في $U(20)$.

١٤- لتكن $G=\langle a\rangle$ زمرة دوارة بحيث $o(a)=24$. أوجد جميع مولدات الزمرة الجزئية التي مرتبتها 8.

١٥- لتكن $G$ زمرة تبديلية ولتكن

$$H=\{a : a\in G; o(a)\ divides\ 12\}.$$

أثبت أن $H$ زمرة جزئية من $G$.



١٦- ليكن $n,m\in Z$ وأن $k=lcm(n,m)$. أثبت أن $\langle k\rangle=\langle n\rangle\cap\langle m\rangle$.

١٧- أثبت أن الزمرة $U(2^n)$ حيث $n\geq 3$ ليست دوارة.

١٨- لتكن $G$ زمرة و $a,b\in G$. أثبت أن $o(ab)=o(ba)$.

٢٠- لتكن $G$ زمرة و $a,b\in G$. إذا كان $a.b\in Z(G)$ أثبت أن $ab=ba$.

# الفصـــل الـــرابـــع

# زمـــرة التبــــاديـــل

في هذا الفصل سوف ندرس زمرة التوابع ( التطبيقات ) المتباينـــة والغـــامرة مـــن المجموعة $A$ إلى $A$ (للمجموعة $A$) التي تسمى زمرة التباديل. في بداية ومنتصـــف القرن التاسع عشر كانت زمرة التباديل هي الزمرة الوحيدة التي بحثهـــا الرياضـــيون، وفي حوالي عام ١٨٥٠ تم إدخال المفهوم المجرد للزمرة من قبل *Cayley* واســـتغرق ربع قرن قبل أن تترسخ الفكرة.

## ٤-١. زمـــرة التبـــاديـــل.

**تعريـــف.**

التبديل للمجموعة $A$ هو تطبيق من $A$ إلى $A$ متباين وغامر.

ينتج من التعريف مباشرة التمهيدية التالية:

**تمهيديـــة ٤-١-١.**

إن مجموعة التباديل لمجموعة $A$ تشكل زمرة بالنسبة إلى عملية تركيب التطبيقات.

**البرهـــان.**

واضح. ∎

بالرغم من أن زمرة التباديل لأية مجموعة غير خالية $A$ موجودة فإننا سوف نركز اهتمامنا على الحالة التي تكون فيها المجموعة $A$ منتهية. أكثر من ذلك، سوف نعتبـــر المجموعة $A$ دائماً من الشكل $\{1,2,3,\cdots,n\}$ وذلك من أجل أي عدد صحيح موجب $n$.

وعلى عكس علم التفاضل والتكامل حيث إن معظم التوابع تعرف على مجموعات غير منتهية وتعطى بصيغ، فإن التباديل لمجموعة منتهية في الجبر تعطـــى عـــادة بكتابـــة صريحة لكل عنصر من عناصر المنطلق وقيم تابعه المقابلة.

**مثـــال.**

إن التبديل $\alpha$ للمجموعة $\{1,2,3,4\}$ معرف على الشكل:

$$\alpha(1)=2,\quad \alpha(2)=3,\quad \alpha(3)=1,\quad \alpha(4)=4$$

هناك طريقة أفضل للتعبير عن التبديل $\alpha$ وهي:

$$\alpha=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{bmatrix}$$

في هذه الحالة القيم $\alpha(j)$ تقع مباشرة تحت القيم $j$ وذلك أياً كان $j\in\{1,2,3,4\}$.

بشكل مشابه، التبديل $\beta$ للمجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$ المعطى بالشكل:

$$\beta(1)=5, \beta(2)=3, \beta(3)=1, \beta(4)=6, \beta(5)=2, \beta(6)=4$$

يمكن التعبير عنه بالشكل:

$$\beta=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&3&1&6&2&4\end{bmatrix}$$

إن تركيب التباديل يتم إيجاده من اليمين إلى اليسار بأن نتحرك من أعلى إلى أسفل ثـم من جديد من أعلى إلى أسفل. كما في المثال التالي:

**مثـــال.**

لنأخذ التبديلين $\gamma,\sigma$ المعرفين بالشكل:

$$\gamma=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&2&3\end{bmatrix},\quad \sigma=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&5&1\end{bmatrix}$$

ولنعين التبديل $\gamma\circ\sigma$ فنجد أن:

$$\gamma\circ\sigma(1)=\gamma(\sigma(1))=\gamma(2)=4 \text{ ، } \gamma\circ\sigma(2)=\gamma(\sigma(2))=\gamma(4)=2 .$$

بالطريقة نفسها يتعين لدينا التبديل $\gamma\circ\sigma$ ويكون:

$$\gamma\circ\sigma=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&1&3&5\end{bmatrix}$$

لنورد الآن بعض الأمثلة:



**أمثلـــة ٤-١-٢.**

١. **الزمرة التناظريـة $S_3$.** لنفرض أن $S_3$ مجموعة كل التوابع المتباينة للمجموعة $\{1,2,3\}$. إن المجموعة $S_3$ مع عملية تركيب التطبيقات تشكل زمرة مرتبتها 6. وعناصر هذه الزمرة هي:

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix},\quad \alpha=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}$$

$$\gamma=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix},\quad \delta=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix},\quad \mu=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $\beta=\alpha^2$، $\delta=\alpha\circ\gamma$، $\mu=\alpha^2\circ\gamma$. كما أن

$$\gamma\circ\alpha=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\neq\alpha\circ\gamma$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة التناظرية $S_3$ ليست تبديلية. ◦

٢. **الزمرة التناظريـة $S_n$.**

لتكن $n=\{1,2,3,\cdots,n\}$. وعناصرها من الشكل:

$$\alpha=\begin{bmatrix}1&2&3&\cdots&n\\\alpha(1)&\alpha(2)&\alpha(3)&\cdots&\alpha(n)\end{bmatrix}$$

لنوجد مرتبة الزمرة $S_n$. يوجد لدينا $n$ خيار لتعيين $\alpha(1)$. عندما يتعين $\alpha(1)$ يبقى لدينا $(n-1)$ إمكانية لتعيين $\alpha(2)$. وبمعرفة $\alpha(2)$ تبقى لدينا $(n-2)$ إمكانية لمعرفة $\alpha(3)$ وهكذا، بالمتابعة على هذا المنوال نرى أن الزمرة $S_n$ تحوي $n(n-1)(n-2)\cdots3.2.1=n!$ عنصراً. كما أن الزمرة $S_n$ حيث $n\geq3$ ليست تبديلية، وذلك كما وجدنا في المثال (١) أن الزمرة $S_3$ ليست تبديلية.

كذلك الزمرة $S_4$ ليست تبديلية لأنه لو أخذنا

$$\alpha=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{bmatrix}$$

فإن

$$\beta\circ\alpha = \begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{bmatrix} = \alpha\circ\beta .$$

**تنـــاظـــر المربـــع.**

لنفرض أن $D_4=\{1,2,3,4\}$. سوف نربط كل حركة في $D_4$ بتبديل مواقع كل من رؤوس المربع الأربعة. لنحدد مواقع الرؤوس الأربعة ولنعتبر هذه المواقع هي المواقع البدائية ( قبل الحركة). بعد الدوران (مع عقارب الساعة) $90°$.

فنحصل على التبديل $\rho=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{bmatrix}$. بينما لو كان الدوران حول المحور الأفقـي فنحصل على التبديل $\phi=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{bmatrix}$. إن العنصرين $\rho,\phi$ يولدان زمـرة التباديـل للمجموعة $D_4$.

**الترميـز الـدوري.**

يوجد ترميز آخر يستخدم لأجل تباديل محددة يسمى الترميز الدوري وقـد عرفـه لأول مرة الرياضي الفرنسي كوشي عام ١٨١٥. لنورد بعـض الأمثلـة علـى هـذا الترميز.

**مثـال.**

لنأخذ التبديل

$$\beta=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&3&1&6&2&4\end{bmatrix}$$

بالاعتماد على الترميز الدوري يمكن أن نكتب $\beta$ على الشكل $\beta=(4,6)(3,1,5,2)$ أو على الشكل $(6,4)(2,3,1,5)$.

**تعريـف.**

كل عبارة من الشكل $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m)$ تسمى دوراً طوله $m$ أو $m-$دور.

**ضرب الأدوار.**

نعرف ضرب الأدوار بأن نضع في ذهننا أن الدور هو تبديل يثبت كل عنصر غير ظاهر في الدور. نوضح ذلك من خلال المثال التالي:



**مثـال.**

الدور $(4,6)$ في $S_6$ يعبر عن التبديل $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&6&5&4\end{bmatrix}$. بهذه الطريقة يمكن أن نضرب الأدوار بأن نعدها كتبديل معطاة بشكل سهمي.

**مثـال.**

في $S_8$ لنأخذ التبديلين

$\alpha=(1,3)(2,7)(4,5,6)(8)$ و $\beta=(1,2,3,7)(6,4,8)(5)$.

بالامكان إهمال الفواصل بين العناصر، أي بالمكان التعبير عن $\alpha,\beta$ بالشكل

$\alpha=(13)(27)(456)(8)$ و $\beta=(1237)(648)(5)$

إن جداء التبديلين $\alpha\beta$ هو

$$\alpha\circ\beta=(13)(27)(456)(8)(1237)(648)(5)$$

ولكن من المرغوب به التعبير عن هذا التبديل بشكل أدوار منفصلة، أي أدوار مختلفة لا تحوي أعداداً مشتركة مع الأخذ بالحسبان أن تركيب التوابع من اليمين إلى اليسـار وأن كل دور لا يحوي رمزاً ما فإنه يثبت ذلك الرمز. وهنا نبدأ مثلاً بالعدد 1 نبدأ مـن اليمين: نلاحظ إن $(5)$ تثبت 1، وأن $(648)$ تثبت 1، وأن $(1237)$ ترسل 1 إلى 2، كما أن $(8)$ تثبـت 2، وأن $(456)$ تثبـت 2، وأن $(27)$ ترسـل 2 إلـى 7، وأن $(13)$ تثبت 7، وبالتالي نجد $\alpha\circ\beta=(17\cdots)$. لمعرفة بقية العناصر نعيد كامل العملية بـدأً مـن 7 فنجـد دور بعـد آخـر مـن اليميـن إلـى اليسـار $7\to7\to7\to1\to1\to1\to1\to3$. ومنه $\alpha\circ\beta=(173\cdots)$. وهكذا في النهايـة نجد $\alpha\circ\beta=(1732)(48)(56)$.

**مثـال.**

في $S_5$ لنأخذ التبديلين

$\alpha=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{bmatrix}$ و $\beta=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&2&3\end{bmatrix}$.

فنجد أن $\alpha=(12)(3)(45)$ و $\beta=(153)(24)$. وبالتالي فإن

$\alpha \circ \beta = (12)(3)(45)(153)(24) = (14)(253)$ .

**ملاحظـــات.**

– في الترميز الدوري معظم الرياضيين لا يكتبون الأدوار التي لها مـدخل واحـد فقط. وفي هذه الحالة يمكن أن نفهم أن كل عنصر غير مكتوب يطبق على نفسه. فمثلاً التبديل $\alpha=(12)(3)(45)$ يمكن كتابته على الشكل $\alpha=(12)(45)$ . وكذلك التبديل

$$\beta=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&1&5\end{bmatrix}$$

يكتب على الشكل $\beta=(134)$ .

– التبديل الواحدي يتألف فقط من أدوار كل منها ذو مدخل واحد ولهـذا لا يمكـن أن نحذف كل هذه الأدوار. وفي هذه الحالة يمكننا أن نكتب أي واحدة من هـذه الأدوار. فمثلاً التبديل

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{bmatrix}$$

يمكن التعبير عنه على الشكل $\varepsilon=(5)$ أو $\varepsilon=(1)$ . ◦

لنورد الآن عددا من المبرهنات حول التباديل والأدوار.

**مبرهنـــة ٤-١-٣.**

كل تبديل لمجموعة منتهية يكتب كدور أو جداء لأدوار منفصلة.

**البرهـــان.**

ليكن $\alpha$ تبديلاً للمجموعة $A=\{1,2,3,\cdots n\}$ . كي نكتب $\alpha$ على شكل أدوار منفصلة نختار عنصراً من $A$ وليكن $a_1$ . لنضع

$$a_2=\alpha(a_1),\qquad a_3=\alpha(\alpha(a_1))=\alpha^2(a_1)$$

وهكذا حتى نصل إلى $a_{m+1}=\alpha^m(a_1)$ وذلك من أجل عدد ما $m$. إن العدد $m$ موجود لأن المتتالية

$$a_1,\alpha(a_1),\alpha^2(a_1),\alpha^3(a_1),\cdots$$



منتهيـــة وذلـــك لأن المجموعـــة $A$ منتهيـــة. وبالتـــالي يوجـــد $i\neq j$ بحيـــث $\alpha^i(a_1)=\alpha^j(a_1)$ . بفرض $i<j$ وأن $m=j-i$ فنجد أن $a_1=\alpha^m(a_1)$ . نعبر عن هذه العلاقة بين $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$ بالشكل $\alpha=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m)\cdots$ حيث النقـــاط الثلاث في النهاية تشير إلى أننا قد لا نكون استنفدنا كل المجموعة $A$ بهذه العملية. في هذه الحالة نختار عنصراً آخر $b_1$ من $A$ غير ظاهر في الدور الأول و نتابع حتى نولد دوراً جديداً كما في السابق. أي نفرض $b_2=\alpha(b_1)$ و $b_3=\alpha^2(b_1)$ وهكذا حتى نصل إلى $b_1=\alpha^k(b_1)$ من أجل عدد ما $k$. إن الدور الجديد الذي حصلنا عليه لن يحوي أي عنصر مشترك مع الدور الأول. لنفرض أنه يوجد عنصر مشـترك بـين الـدورين السابقين، عندئذ يوجد $i,j$ بحيث $\alpha^i(a_1)=\alpha^j(b_1)$ ومنـه $b_1=\alpha^{i-j}(a_1)$ وبالتـالي $b_1=a_t$ حيث $1\le t\le m$. وهذا يناقض طريقة اختيار العنصر $b_1$. نتابع هذه العمليـة حتى ننهي جميع عناصر $A$. فنحصل بذلك على التبديل التالي:

$$\alpha=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m)(b_1,b_2,b_3,\cdots,b_k)\cdots(c_1,c_2,c_3,\cdots,c_t)$$

وبهذه الطريقة نرى أن كل تبديل يمكن أن يكتب كجداء لأدوار منفصلة. ◦

المبرهنة التالية تعطينا واحدة من الخواص التي تتمتع بها الأدوار المنفصلة.

**مبرهنـــة ٤-١-٤.**

لـــيكن $\alpha=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m)$ و $\beta=(b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n)$ دوريـــن لا يملكـــان عناصر مشتركة. عندئذ: $\alpha\beta=\beta\alpha$ .

**البرهـــان.**

من أجل عدم التخصيص، لنفرض أن $\alpha$ و $\beta$ هما تبديلان للمجموعة

$$S=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m,b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n,c_1,c_2,c_3,\cdots,c_k\}$$

حيث إن $c_i$ هي عناصر المجموعة $S$ التي تبقى ثابتة من اليسار مـن خـلال $\alpha$ و $\beta$. لنبرهن أن $\alpha\beta=\beta\alpha$ . أي لنبرهن أياً كـان $x\in S$ فـإن $\alpha\beta(x)=\beta\alpha(x)$ . لـيكن $x\in S$ . نميز الحالات التالية:

– الحالة الأولى: $x\in\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$ . لنفرض أن $x=a_i$، عندئذ

$$(\alpha\beta)(a_i) = \alpha(\beta(a_i)) = \alpha(a_i) = a_{i+1}$$

وذلك لأن $\beta$ يثبت كل العناصر $a_i$ حيث $1 \le i \le m$. (إن $a_{i+1}$ يمثل $a_i$ في الحالة $i = m$). كذلك

$(\beta\alpha)(a_i) = \beta(\alpha(a_i)) = \beta(a_i) = a_{i+1}$ أي أن $\alpha\beta = \beta\alpha$.

– الحالة الثانية: $x \in \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\}$ تعالج بطريقة الحالة الأولى نفسها.

– الحالة الثالثة: $x \in \{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k\}$ وبما أن كلاً من $\alpha$ و $\beta$ يثبتان العناصر $c_i$ نجد أن

$(\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = \alpha(x) = x$ وأن $(\beta\alpha)(x) = \beta(\alpha(x)) = \beta(x) = x$

وبهذا الشكل يتم المطلوب. ∘

ميزة أخرى من ميزات الترميز الدوري توضحه المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٤-١-٥.**

مرتبة أي تبديل لمجموعة منتهية مكتوب بشكل أدوار منفصلة هي المضاعف المشترك الأصغر لأطوال الأدوار.

**البرهان.**

ليكن $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ دوراً طوله $n$. وليكن $k \le n$ عندئذ:

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)^k = (a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n, a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}).$$

وهذا يبين لنا أن الدور الذي طوله $n$ مرتبته تساوي $n$. ليكن $\beta$ و $\alpha$ دورين منفصلين طول كل منهما على الترتيب $m,n$، وليكن $k$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين $m,n$. عندئذ كل من $\alpha^k$ و $\beta^k$ هو التبديل المطابق $\varepsilon$. وبما أن كلاً من $\beta$ و $\alpha$ تبادليان لأنهما لا يحويان عناصر مشتركة فإن $(\alpha\beta)^k = \alpha^k \beta^k = \varepsilon$، وهذا يبين لنا أن مرتبة العنصر $\alpha\beta$ تقسم $k$. لنفرض أن مرتبة العنصر $\alpha\beta$ تساوي $t$ عندئذ $(\alpha\beta)^t = \alpha^t \beta^t = \varepsilon$ ومنه $\alpha^t = \beta^{-t}$. وبما أن $\beta$ و $\alpha$ لا يملكان عناصر مشتركة، فإن الشيء ذاته محقق لأجل $\beta^{-t}$ و $\alpha^t$. أي أن كلاً من $\beta^{-t}$ و $\alpha^t$ لا يملكان رموزاً مشتركة، وذلك لأن رفع الدور إلى قوة لن يعطينا رموزاً جديدة. اذا كان $\beta^{-t}$ و $\alpha^t$



متساويين وليس بينهما رموز مشتركة فإن $\alpha^t = \beta^{-t}\varepsilon$ لأن كل عنصر من $\alpha^t$ يثبت من خلال $\beta^{-t}$ والعكس أيضا صحيح. مما سبق نجد أن كلاً من $m$ و $n$ يقسمان $t$ وهذا يبين لنا أن $k$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين $m$ و $n$ ويقسم $t$ أيضاً.

أي أن $k = t$. ∘

**تعريف.**

كل تبديل من الشكل $(ab)$ يسمى $2-$ دوراً.

**مبرهنة ٤-١-٦.**

كل تبديل من $S_n$ حيث $n > 1$ هو جداء مؤلف من $2-$ دور.

**البرهان.**

نلاحظ أن التبديل المطابق يمكن التعبير عنه بالشكل (12)(12)، وبالتالي فإن التبديل المطابق هو جداء مؤلف من $2-$ دور. وبالاعتماد على المبرهنة (٤-١-٣) نجد أن كل تبديل يكتب على شكل جداء لأدوار منفصلة

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_t)\cdots(c_1, c_2, c_3, \cdots, c_s)'$$

وهذا الجداء يساوي

$$(a_1a_k)(a_1a_{k-1})\cdots(a_1a_2)(b_1b_t)(b_1b_{t-1})\cdots(b_1b_2)(c_1c_s)(c_1c_{s-1})\cdots(c_1c_2).$$ ∘

من خلال المثال التالي سوف نوضح كيفية كتابة كل دور كجداء مؤلف من $2-$دور.

**مثال.**

$$(12345) = (15)(14)(13)(12)$$

$$(12345) = (54)(53)(25)(15)$$

$$(12345) = (21)(25)(24)(23)$$

$$(12345) = (54)(52)(21)(23)(13)$$

إن المثال السابق يوضح لنا أن تحليل أي تبديل إلى جداء مؤلف من $2-$ دور ليس وحيداً.

**تمهيدية ٤-١-٧.**

إذا كان $\varepsilon = \beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_r$ حيث $\beta_i$ عبارة عن 2− دور، عندئذ فإن $r$ عدد زوجي.

**البرهان.**

واضح أن $r \neq 1$ وذلك لأن أي دور طوله 2 لن يكون تبديلاً مطابقاً. البرهان سنورده بالاستقراء على $r$. إذا كان $r = 2$ يتم المطلوب. من أجل $r > 2$ لنفرض أن التمهيدية صحيحة من أجل أي عدد $k < r$ حيث $k \in N^*$. بما أن $(ij) = (ji)$ فإن الجداء $\beta_1\beta_2$ يمكن التعبير عنه بأحد الأشكال التالية:

$$(ab)(ab) = \varepsilon$$

$$(ab)(ac) = (bc)(ab)$$

$$(ab)(cd) = (cd)(ab)$$

$$(ab)(bc) = (bc)(ac)$$

إذا تحققت الحالة الأولى عندئذ بإمكاننا حذف $\beta_1\beta_2$ من الجداء الأصلي ويكون لدينا

$$\varepsilon = \beta_1.\beta_2.\beta_3.\cdots.\beta_r$$

وحسب الفرض الاستقرائي يكون العدد $r-2$ زوجياً. في الحالات الثلاث المتبقية سوف نستبدل $\beta_1\beta_2$ في الطرف الأيسر بما يساويه في الطرف الأيمن لنحصل على جداء جديد مؤلف من 2− دور فيه $r$ حد ويساوي التبديل المطابق وفي هذه الحالة يصبح العدد الصحيح الأول $a$ في 2−دور الثاني من الجداء بدلاً من الأول. نعيد الآن الإجراء السابق من أجل $\beta_1\beta_2$ لنحصل:

− إما على جداء مؤلف من 2− دور فيه $r-2$ حد يساوي التطبيق المطابق، وحسب الفرض الاستقرائي يكون العدد $r-2$ زوجياً.

− أو على جداء جديد مؤلف من 2− دور فيه $r$ حد لأجله يكون العدد الصحيح $a$ في الـ2− دور الثالث. بمتابعة العملية السابقة عدداً منتهياً من المرات نصل إلى الجداء $\beta_{r-1}\beta_r$. إن $\beta_{r-1}\beta_r$ هو بالتأكيد التبديل المطابق، لأنه اذا لم يكن التبديل المطابق فإننا نحصل على جداء مؤلف من 2−أدوار يحوي $r$ حداً فيه العدد الصحيح $a$ يقع في 2−دور الأخير وتبديل كهذا لن يثبت العدد $a$ وهذا يناقض الفرض. مما سبق نجد أن $\beta_{r-1}\beta_r$ هو التبديل المطابق وهكذا، حسب الفرض الاستقرائي فإن $r-2$ هو عدد زوجي. ∘

**مبرهنة ٤-١-٨.**

إذا أمكن كتابة التبديل $\alpha$ كجداء لعدد زوجي من 2−دور عندئذ كل تركيب للتبديل $\alpha$ في جداء من 2−دور يجب أن يتألف من عدد زوجي. أي أنه إذا كان

$\alpha = \beta_1.\beta_2.\beta_3\cdots.\beta_r$ و $\alpha = \gamma_1.\gamma_2.\gamma_3.\cdots.\gamma_s$

حيث $\beta_i, \gamma_j$ كل منهما عبارة عن 2−دور، $1 \le i \le r$ و $1 \le j \le s$. فإن $r$ و $s$ كلاهما زوجي أو كلاهما فردي.

**البرهان.**

لنفرض أن

$\alpha = \beta_1.\beta_2.\beta_3\cdots.\beta_r$ و $\alpha = \gamma_1.\gamma_2.\gamma_3.\cdots.\gamma_s$

حيث كل من $\beta_i$ و $\gamma_j$ عبارة عن 2−دور. عندئذ:

$$\gamma_1.\gamma_2.\gamma_3.\cdots.\gamma_s = \beta_1.\beta_2.\beta_3\cdots.\beta_r$$

ومنه

$$\varepsilon = \gamma_1.\gamma_2.\gamma_3.\cdots.\gamma_s.\beta_r^{-1}\beta_{r-1}^{-1}.\cdots.\beta_1^{-1}$$

وبما أن كل 2−دور هو مقلوب لنفسه نجد أن

$$\varepsilon = \gamma_1.\gamma_2.\gamma_3.\cdots.\gamma_s.\beta_r\beta_{r-1}.\cdots.\beta_1$$

وحسب التمهيدية (٤−١− ٧) فإن العدد $r+s$ هو عدد زوجي. ومنه $r$ و $s$ كلاهما فردي أو كلاهما زوجي. ∘

**تعريف.**

نسمي كل تبديل يمكن كتابته كجداء لعدد زوجي من 2−دور تبديلاً زوجياً. ونسمي كل تبديل يمكن كتابته كجداء لعدد فردي من 2−دور تبديلاً فردياً.

بالاعتماد على المبرهنتين (٤-١-٦) و(٤-١-٨) نجد أن كل تبديل إما أن يكون زوجياً أو يكون فردياً فقط. ولا يمكن أن يكون زوجياً وفردياً في آن واحد. انطلاقاً من هذه الحقيقية نحصل على المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٤-١-٩.**

مجموعة التباديل الزوجية في الزمرة $S_n$ تشكل زمرة جزئية من $S_n$.

**البرهان.**

نتركه تمريناً للقارئ. ∘

**بعض التطبيقات على زمرة التباديل.**

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة التباديل للمجموعة $S$. وليكن $i \in S$. نسمي المجموعة

$$Stab_G(i)=\{\phi:\phi\in G,\quad \phi(i)=i\}$$

مثبت النقطة $i$ في $G$.

**تمهيدية ٤-١-١٠.**

لتكن $G$ زمرة التباديل للمجموعة $S$. إن المجموعة $Stab_G(i)$ زمرة جزئية في $G$ وذلك أياً كان $i \in S$.

**البرهان.**

نتركه تمريناً للقارئ. ∘

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة التباديل للمجموعة $S$. وليكن $s \in S$. نسمي المجموعة

$$orb_G(s)=\{\varphi(s):\quad \varphi\in G\}$$

مدار النقطة $s$ بالنسبة إلى الزمرة $G$. واضح من التعريف أن $orb_G(s)$ هو مجموعة جزئية في $s$ وذلك $\forall s\in S$.

لنورد المثال التالي بناءً على التعاريف السابقة.

**مثال.**

لنأخذ زمرة التباديل التالية:

$$G=\{(1),(132)(465)(78),(132)(465),(123)(456),(123)(458)(78),(78)\}$$

عندئذ:

$$orb_G(1)=\{1,3,2\}\qquad Stab_G(1)=\{(1),(78)\}$$
$$orb_G(2)=\{2,1,3\}\qquad Stab_G(2)=\{(1),(78)\}$$
$$orb_G(4)=\{4,6,5\}\qquad Stab_G(4)=\{(1)\},(78)\}$$
$$orb_G(7)=\{7,8\}\qquad Stab_G(7)=\{(1),(123)(465),(123)(456)\}$$

لو أمعنا النظر في المثال السابق لوجدنا أن مرتبة الزمرة $G$ تساوي إلى جداء مدار أي نقطة بمثبتها. لنورد تعميما لهذه الحقيقة من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٤-١-١١.**

لتكن $G$ زمرة التباديل لمجموعة ما $S$. عندئذ $\forall i\in S$ فإن

$$(G:1)=Card\quad orbt_G(i).(Stab_G(i):1)$$

**البرهان.**

حسب مبرهنة لاغرانج وبما أن $Stab_G(i)$ زمرة جزئية في $G$ وذلك أياً كان $i\in S$ فإن

$$(G:Stab_G(i))=\frac{(G:1)}{(Stab_G(i):1)}$$

ويساوي عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $Stab_G(i)$ في $G$. ومنه يكفي لإثبات المبرهنة أن يتحقق $(G:Stab_G(i))=Card\quad orbt_G(i)$. وهذا يتحقق إذا وجد تقابل بين مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة $Stab_G(i)$ والمجموعة $orb_G(i)$. لنفرض أن $M_l$ هي مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة $Stab_G(i)$ في $G$. ولنعرف العلاقة $T:M_l\to orb_G(i)$ بالشكل التالي: أياً كان $\varphi.Stab_G(i)\in M_l$ فإن $T(\varphi.Stab_G(i))=\varphi(i)$ فنجد أن العلاقة $T$ معرفة جيداً (تطبيق) لأنه أياً كان :

$$f.Stab_G(i),\varphi.Stab_G(i)\in M_l$$

بحيث $f.Stab_G(i) = \varphi.Stab_G(i)$ فإنه حسب المبرهنة(٢-٣-١) نجد $f^{-1}\circ\varphi(i) \in Stab_G(i)$ ومنه $f^{-1}\circ\varphi(i)=i$ وبالتالي $\varphi(i)=f(i)$ . أي أن

$$T(\varphi.Stab_G(i)) = T(f.Stab_G(i))$$

بطريقة مشابهة نبرهن على أن التطبيق $T$ متباين. كذلك فإن $T$ غامر لأنه أياً كانت $j\in orb_G(i)$ يوجد $\alpha\in G$ بحيث $\alpha(i)=j$ وبالتالي $\alpha.Stab_G(i)\in M_l$ وهكذا فإن $T(\alpha.Stab_G(i))=\alpha(i)=j$ . ◊

## ٤-٢. زمرة القياس.

### ١ - القياس على مستقيم.

لنفرض أن $\mathfrak{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و $S_{\mathfrak{R}}$ زمرة التباديل للمجموعة $\mathfrak{R}$. ليكن $a,b\in\mathfrak{R}$، نعلم أن القيمة المطلقة $|a-b|$ تمثل البعد ( المسافة ) بين النقطتين $a,b$.
سوف نرمز للمسافة بين النقطتين $a,b$ بالرمز $d(a,b)$.

**تمهيدية ٤-٢-١.**

لتكن $S_{\mathfrak{R}}$ زمرة التباديل للمجموعة $\mathfrak{R}$ ولنأخذ المجموعة

$$I(\mathfrak{R}) = \{\sigma:\sigma\in S_{\mathfrak{R}};\quad d(x,y)=d(\sigma(x),\sigma(y));\quad \forall x,y\in\mathfrak{R}\}$$

إن المجموعة $I(\mathfrak{R})$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $S_{\mathfrak{R}}$.

**البرهان.**

إن المجموعة $I(\mathfrak{R})$ غير خالية، لأن التطبيق المطابق $I_{\mathfrak{R}}$ على المجموعة $\mathfrak{R}$ هو عنصر من $S_{\mathfrak{R}}$ ويحقق أياً كان $a,b\in\mathfrak{R}$ فإن

$$d(I_{\mathfrak{R}}(a), I_{\mathfrak{R}}(b)) = d(a,b)$$

أي أن $I_{\mathfrak{R}}\in I(\mathfrak{R})$.

ليكن $\sigma\in I(\mathfrak{R})$ ولنبرهن على أن $\sigma^{-1}\in I(\mathfrak{R})$. بما أن $\sigma\in S(\mathfrak{R})$ ولكون $S_{\mathfrak{R}}$ زمرة فإن $\sigma^{-1}\in S_{\mathfrak{R}}$ كما أن $\sigma^{-1}$ يحقق

$$d(\sigma^{-1}(a),\sigma^{-1}(b)) = a(\sigma(\sigma^{-1}(a)),\sigma(\sigma^{-1}(b))) = a(a,b)$$

وذلك أياً كان $a,b\in\mathfrak{R}$، أي أن $\sigma^{-1}\in I(\mathfrak{R})$.



ليكن $\sigma,\tau\in I(\mathfrak{R})$ عندئذ $\tau^{-1}\in I(\mathfrak{R})$ وأن

$$d(\sigma\circ\tau^{-1}(a),\sigma\circ\tau^{-1}(b)) = d(\sigma(\tau^{-1}(a)),\sigma(\tau^{-1}(b))) =$$
$$= d(\tau^{-1}(a),\tau^{-1}(b)) = d(a,b)$$

وذلك أياً كان $a,b\in\mathfrak{R}$، أي أن $\sigma\circ\tau^{-1}\in I(\mathfrak{R})$. مما سبق نجد أن $I(\mathfrak{R})$ زمرة جزئية من الزمرة $S_{\mathfrak{R}}$. ◊

**تعريف.**

نسمي الزمرة $I(\mathfrak{R})$ زمرة القياس على $\mathfrak{R}$.

لندرس الآن واحدة من الحالات التي يتساوى فيها أي عنصرين من $I(\mathfrak{R})$ وذلك من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ٤-٢-٢.**

ليكن $\sigma,\tau\in I(\mathfrak{R})$. إذا وجد $a,b\in\mathfrak{R}$ بحيث $a\neq b$ وأن

$$\sigma(a)=\tau(a), \sigma(b)=\tau(b)$$

عندئذ $\sigma=\tau$ ؛

**البرهان.**

ليكن $c\in\mathfrak{R}$ عندئذ

$$d(c,a) = d(\sigma(c),\sigma(a)) = |\sigma(c)-\sigma(a)|$$
$$d(c,a) = d(\tau(c),\tau(a)) = |\tau(c)-\tau(a)|$$

ومنه $|\sigma(c)-\sigma(a)| = |\tau(c)-\tau(a)|$ أي أن

$\sigma(c)-\sigma(a) = \pm(\tau(c)-\tau(a))$.

ولنفرض أن $\sigma(c)\neq\tau(c)$.

إذا كان $\sigma(c)-\sigma(a) = +(\tau(c)-\tau(a))$ عندئذ بما أن $\sigma(a)=\tau(a)$ وأن $\sigma(c)-\sigma(a)=\tau(c)-\tau(a)$ نجد أن

$$\sigma(c)-\tau(c) = \sigma(a)-\tau(a) = \sigma(a)-\sigma(a) = 0$$

أي أن $\sigma(c)=\tau(c)$ وهذا مرفوض فرضاً. ومنه فإن

$$\sigma(c)-\sigma(a)=-(\tau(c)-\tau(a))$$

وبالتالي

$$\sigma(c)+\tau(c)=\sigma(a)+\tau(a)=\sigma(a)+\sigma(a)=2\sigma(a)$$

بشكل مشابه نجد أن $\sigma(c)+\tau(c)=2\sigma(b)$ ومنه فإن $2\sigma(a)=2\sigma(b)$ أي أن $\sigma(a)=\sigma(b)$ وبما أن $\sigma$ متباين فإن $a=b$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $\sigma(c)=\tau(c)$ وذلك أيا كان $c\in\Re$ أي أن $\sigma=\tau$ . ◊

**٢ - القياس في المستوي.**

لنرمز للمستوي $\Re\times\Re$ بالرمز $E=\Re\times\Re$ ولتكن

$$A=(x_A,y_A),B=(x_B,y_B)\in E$$

نعرف المسافة بين النقطتين $A,B$ في المستوي $E$ بالشكل

$$\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

والتي سوف نرمز لها $d(A,B)$.

لنفرض أن $S_E$ هي زمرة التباديل للمجموعة $E$. ولندرس التمهيدية التالية:

**تمهيدية ٤-٢-٣.**

لتكن $S_E$ زمرة التباديل للمجموعة $E$ ولنأخذ المجموعة

$$I(E)=\{\sigma:\sigma\in S_E;\quad d(A,B)=d(\sigma(A),\sigma(B));\quad \forall A,B\in E\}$$

إن المجموعة $I(E)$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $S_E$.

**البرهان.**

إن المجموعة $I(E)$ غير خالية، لأن التطبيق المطابق $I_E$ على المجموعة $E$ هو عنصر من الزمرة $S_E$ ويحقق $d(I_E(A),I_B(B))=d(A,B)$ وذلك أياً كان $A,B\in E$. أي أن $I_E\in I(E)$. ليكن $\tau\in I(E)$ ولنبرهن على أن $\tau^{-1}\in I(E)$.

بما أن $\tau\in S_E$ ولكون $S_E$ زمرة فإن $\tau^{-1}\in S_E$، بالإضافة لذلك فإن

$$d(\tau^{-1}(A),\tau^{-1}(B))=d(\tau(\tau^{-1}(A)),\tau(\tau^{-1}(B)))=d(A,B)$$

وذلك أياً كان $A,B\in E$، أي أن $\tau^{-1}\in I(E)$. ليكن $\sigma,\tau\in I(E)$ عندئذ



$$d(\sigma\circ\tau^{-1}(A),\sigma\circ\tau^{-1}(B))=d(\sigma(\tau^{-1}(A)),\sigma(\tau^{-1}(B)))=$$
$$=d(\tau^{-1}(A),\tau^{-1}(B))=d(A,B)$$

وذلك أياً كان $A,B\in E$. أي أن $\sigma\circ\tau^{-1}\in I(E)$. مما سبق نجد أن $I(E)$ زمرة جزئية من الزمرة $S_E$. ◊

**تعريف.**

نسمي الزمرة $I(E)$ زمرة القياس على $E=\Re\times\Re$.

هدفنا الآن هو دراسة إحدى الحالات التي يتساوى فيها أي عنصرين من $I(E)$ لأجل ذلك لابد لنا من التمهيدية التالية:

**تمهيدية ٤-٢-٤.**

ليكن $\sigma\in I(E)$ و $A,B,C\in E$ ثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة. ولنفرض أن

$$\sigma(A)=A',\sigma(B)=B',\sigma(C)=C'$$

عندئذ المثلثان $ABC$ و $A'B'C'$ متشابهان.

**البرهان..**

بما أن

$$d(A',B')=d(\sigma(A),\sigma(B))=d(A,B)$$
$$d(A',C')=d(\sigma(A),\sigma(C))=d(A,C)$$
$$d(B',C')=d(\sigma(B),\sigma(C))=d(B,C)$$

نجد أن أضلاع المثلثين $ABC$ و $A'B'C'$ متساوية وبالتالي فإن المثلثين السابقين متشابهان. ◊

**تمهيدية ٤-٢-٥.**

ليكن $\sigma,\tau\in S_E$. إذا وجدت ثلاثة نقاط $A,B,C\in E$ ليست على استقامة واحدة تحقق

$$\sigma(A)=\tau(A),\sigma(B)=\tau(B),\sigma(C)=\tau(C)$$

عندئذ $\sigma=\tau$.

**البرهان.**

لتكن $D\in E$ نقطة اختيارية من المستوي $E$. ولنفرض أن

$$d(A,D)=a,\quad d(B,D)=b,\quad d(C,D)=c$$

وأن

$$\sigma(A)=\tau(A)=A',\sigma(B)=\tau(B)=B',\sigma(C)=\tau(C)=C'$$

عندئذ يكون لدينا

$$d(A',\sigma(D))=d(\sigma(A),\sigma(D))=a=d(A',\tau(A))$$
$$d(B',\sigma(D))=d(\sigma(B),\sigma(D))=b=d(B',\tau(B))$$
$$d(C',\sigma(D))=d(\sigma(C),\sigma(D))=c=d(C',\tau(C))$$

وهندسيا هذا يتحقق فقط عندما $\sigma(D)=\tau(D)$ وذلك بالاعتماد على التمهيدية (٤-٢-٤). ٥

المبرهنة التالية تصف لنا طبيعة عناصر الزمرة $I(E)$.

**مبرهنة ٤-٢-٦.**

كل قياس في المستوي الإقليدي يمكن التعبير عنه كجداء انعكاس و دوران وانسحاب.

**البرهان.**

ليكن $\sigma\in I(E)$. ولتكن $A=(0,0),B=(1,0),C=(0,1)$ ثلاث نقاط في المستوي $E$ ليست على استقامة واحدة.

- لنفرض أن $\sigma(A)=(a,b)$ ولنأخذ الانسحاب $\tau_{-a,-b}$ (انظر التمرين المحلول ٢) فنجد أن

$$\tau_{-a,-b}\circ\sigma(A)=\tau_{-a,-b}(\sigma(A))=\tau_{-a,-b}(a,b)=(a-a,b-b)=(0,0)$$

وهذا يبين لنا أن $\tau_{-a,-b}\circ\sigma(A)=A$.

- لنفرض أن $B=\tau_{-a,-b}\circ\sigma(B)$ فنجد أن

$$d(A,B)=d(\tau_{-a,-b}\circ\sigma(B),\tau_{-a,-b}\circ\sigma(A))=d(\sigma(B),\sigma(A))=d(A,B)=$$
$$=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=1$$

وهذا يبين لنا أن طول القطعة المستقيمة $AB$ يساوي 1. بفرض أن القطعة المستقيمة $AB$ تصنع زاوية $\Theta$ مع المحور $ox$ فنجد أن $B_1=(\cos\Theta,\sin\Theta)$.



لنأخذ الدوران $\rho_{-\Theta}$ (انظر التمرين المحلول ٤) فنجد أن

$$\rho_{-\Theta}(B_1)=\rho_{-\Theta}(\cos\Theta,\sin\Theta)=$$
$$=(\cos\Theta\cos(-\Theta)-\sin\Theta\sin(-\Theta),\cos\Theta\sin(-\Theta)+\sin\Theta\cos(-\Theta))=$$
$$=(\cos^2\Theta+\sin^2\Theta,0)=(1,0)=B$$

مما سبق نجد أن $\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}(B_1)=B$. أي أن $\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}\circ\sigma(B)=B$. بالإضافة لذلك فإن $\rho_{-\Theta}(A)=A$ ومنه

$$A=\rho_{-\Theta}(A)=\rho_{-\Theta}(\tau_{-a-b}(\sigma(A)))=\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}\circ\sigma(A)$$

- لنفرض أن $C'=\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}\circ\sigma(C)$ فنجد أن

$$d(C',A)=d(\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}\circ\sigma(C),\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}\circ\sigma(A))=d(C,A)=1$$
$$d(C',B)=d(\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}\circ\sigma(C),\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}\circ\sigma(B))=d(C,B)=\sqrt{2}$$

وبفرض أن $C'=(x_{C'},y_{C'})$ نجد أن

$$\sqrt{(x_{C'}-x_A)^2+(y_{C'}-y_A)^2}=1$$

أي أن $x_{C'}^2+y_{C'}^2=1$ كذلك $\sqrt{(x_{C'}-x_B)^2+(y_{C'}-y_B)^2}=\sqrt{2}$ ومنه $(x_{C'}-1)^2+{y_{C'}}^2=2$ و منه فإن $x_{C'}=0,{y_{C'}}^2=1$ وبالتالي إما $y_{C'}=1$ أو $y_{C'}=-1$ أي أن إما $C'=(0,1)$ أو $C'=(0,-1)$.

- لنفرض أن $\mu$ هو الانعكاس المطابق إذا كانت $C'=C$ ومنه $\mu(C')=C$.
- وأن $\mu$ هو الانعكاس بالنسبة إلى المحور $ox$ إذا كانت $C'=(0,-1)$ (انظر التمرين المحلول ٣) فنجد أن $\mu(C')=\mu(0,-1)=(0,1)=C$. وبالتالي يكون لدينا

$$\mu\circ\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}\circ\sigma(A)=A$$
$$\mu\circ\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}\circ\sigma(B)=B$$
$$\mu\circ\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}\circ\sigma(C)=C$$

وحسب التمهيدية (٤-٢-٥) نجد أن $\mu\circ\rho_{-\Theta}\circ\tau_{-a-b}\circ\sigma=I_E$ وبالتالي نجد

$$\sigma=\mu^{-1}\circ\rho_{-\Theta}^{-1}\circ\tau_{-a-b}^{-1}=\mu\circ\rho_{\Theta}\circ\tau_{-a-b}$$

وهذا يبين لنا أن أي قياس $\sigma$ للمستوي $E$ هو عبارة عن انعكاس $\mu$ ودوران $\rho_{\Theta}$ وانسحاب $\tau$. ٥

**تمهيدية ٤-٢-٧.**

ليكن $E=\Re\times\Re$ المستوي الإقليدي ولتكن $K\subseteq E$ مجموعة جزئية وغير خالية من المستوي $E$. ولنأخذ المجموعة $I(K)\subseteq I(E)$ المعرفة بالشكل التالي:

$$\sigma\in I(K)\Leftrightarrow \begin{cases}\sigma\in I(E)\\ \forall s\in K;\quad \sigma(s)\in K\\ \forall\sigma(t)\in K;\quad t\in K\end{cases}$$

إن $I(K)$ زمرة جزئية من الزمرة $I(E)$.

**البرهان.**

واضح أن المجموعة $I(K)$ غير خالية، لأن التطبيق المطابق على $E$ هو عنصر من $I(K)$. ليكن $\sigma\in I(K)$ عندئذ $\sigma^{-1}\in I(K)$ لأنه بما أن $\sigma\in I(K)\subseteq I(E)$ وأن $I(E)$ زمرة فإن $\sigma^{-1}\in I(E)$ وأنه

$$\forall s\in K;\quad \sigma(\sigma^{-1}(s))=s\in K$$

وبما أن $\sigma\in I(K)$ فإن $\sigma^{-1}\in I(K)$. من جهة أخرى، ليكن $\sigma^{-1}(t)\in K$ عندئذ $\sigma(\sigma^{-1}(t))=t\in K$ ومنه فإن $\sigma^{-1}\in I(E)$. ليكن $\sigma,\tau\in I(K)$ عندئذ $\tau^{-1}\in I(K)$. لنبرهن على أن $\sigma\circ\tau^{-1}\in I(K)$. أيا كان $s\in K$ فإن $\tau^{-1}(s)\in K$ وبالتالي فإن $\sigma\circ\tau^{-1}(s)=\sigma(\tau^{-1}(s))\in K$.
لنفرض أن $\sigma\circ\tau^{-1}(t)\in K$ وبما أن $\sigma\circ\tau^{-1}(t)=\sigma(\tau^{-1}(t))$ فإن $\tau^{-1}(t)\in K$ ولكون $\tau^{-1}\in I(K)$ فان $t\in K$. مما سبق وحسب تعريف المجموعة $I(K)$ نجد أن $\sigma\circ\tau^{-1}\in I(K)$ ومنه فإن المجموعة $I(K)$ زمرة جزئية من الزمرة $I(E)$. ◦

**تعريف.**

نسمي الزمرة $I(K)$ المعرفة في التمهيدية (٤-٢-٧) الزمرة التناظرية للمجموعة $K$.

**تمهيدية ٤-٢-٨.**

ليكن $K$ مضلعاً نونياً منتظماً. عندئذ توجد دائرة وحيدة تمر برؤوس هذا المضلع. نسمي مركز هذه الدائرة مركز المضلع $K$ .



**البرهان.**

نتركه تمريناً للقارئ. ◦

بالاعتماد على التمهيدية (٤-٢-٧) وجدنا أن المجموعة $I(K)$ تمثل زمرة جزئية من الزمرة $I(E)$ وذلك أياً كانت المجموعة الجزئية $K\subseteq E$. سوف ندرس الآن الزمرة $I(K)$ عندما تمثل المجموعة $K$ مضلعاً منتظماً في المستوي $E$ وسوف نبدأ بالتمهيدية التالية:

**تمهيدية ٤-٢-٩.**

ليكن $K$ مضلعاً منتظماً في المستوي $E$ مركزه $o$. عندئذ أياً كان $\sigma\in I(K)$ فإن $\sigma(o)=o$.

**البرهان.**

ليكن $\tau\in I(E)$ عندئذ فإن $\tau(K)$ هو مضلع نوني منتظم لأن $\tau$ هو قياس على $E$. ومنه أيا كان $\sigma\in I(K)$ فإن $\sigma(K)$ مضلع نوني منتظم مطابق للمضلع $K$ وحسب تعريف المجموعة $I(K)$ فإن $\sigma(K)\subseteq K$. وبما أن هذا محقق أيا كان $\sigma\in I(K)$ وأن $\sigma^{-1}\in I(K)$ فإن $\sigma^{-1}(K)\subseteq K$ وبالتالي $K\subseteq\sigma(K)$. مما سبق نجد أن $\sigma(K)=K$ وبما أن $o$ هو مركز المضلع $K$ فإن $\sigma(o)$ هو مركز المضلع $\sigma(K)$ وذلك لأن $\sigma$ قياس على $E$. وبسبب وحدانية الدائرة المارة برؤوس المضلع $K$ نجد أن $\sigma(o)=o$ وذلك لأن $\sigma(K)=K$. ◦

**تمهيدية ٤-٢-١٠.**

ليكن $K$ مضلعاً نونياً منتظماً في المستوي $E$. عندئذ الصورة المباشرة لأي رأس من رؤوس المضلع $K$ وفق القياس $\sigma$ هو رأس للمضلع $K$.

**البرهان.**

لنفرض أن مركز المضلع $K$ هو $o$. وأن $A$ أحد رؤوس هذا المضلع عندئذ وبما أن $\sigma(o)=o$ وذلك حسب التمهيدية (٤-٢-٩) وبفرض أن $r$ هو نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المضلع $K$ نجد أن

$$r = d(o,A) = d(\sigma(0),\sigma(A)) = d(0,\sigma(A)).$$

وهذا يبين لنا أن $\sigma(A)$ هو رأس للمضلع $\sigma(K)=K$. ∘

**تعريف.**

لتكن $K \subseteq E$ مجموعة غير خالية من المستوي الإقليدي. نقول عن الزمرة التناظرية $I(K)$ إنها $D$–زمرة إذا كان $K$ مضلعاً منتظماً.

إذا كان $K$ مضلعاً نونياً منتظماً فإننا نرمز للزمرة $I(K)$ بالرمز $D_n$.

هدفنا الآن هو دراسة مرتبة الزمرة $D_n$ وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٤-٢-١١.**

ليكن $K \subseteq E$ مضلعاً نونياً منتظماً. عندئذ $(D_n:1)=2n$.

**البرهان.**

لنفرض أن $K$ مضلع نوني منتظم في المستوي $E$ وأن $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ هي رؤوس المضلع. وليكن $\sigma\in I(K)$ قياس للمجموعة $K$. لنرمز للقياس $\sigma$ بالرمز $\sigma_j$ إذا كان $\sigma(A_1)=A_j$ حيث $1\le j\le n$. فنجد أن $\sigma_j(A_1)=\sigma(A_1)=A_j$ ومنه فإن $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ تمثل جميع الدورانات للمضلع $K$ حول المركز $o$ بزاوية $\frac{2\pi(j-1)}{n}$ وهذه الدورانات مختلفة، وذلك لأن $\sigma(K)=K$ مضلع منتظم.

لنفرض أن $\tau$ هو الانعكاس بالنسبة إلى المستقيم المار بالرأس $A_1$ والمركز $o$ للمضلع $K$. فنجد أن $\tau(A_1)=A_1$ وأن $\tau(o)=o$ وذلك حسب التمهيدية (٤-٢-٩) لأن $\tau\in I(K)$. لنفرض أن $\tau(A_2)=A_n$ وبما أن النقاط $o,A_1,A_2$ ثلاث نقاط من المستوي $E$ ليست على استقامة واحدة نجد أن هذه النقاط كافية لتعيين الانعكاس $\tau$ ومنه فإن $\sigma_1\circ\tau,\sigma_2\circ\tau,\sigma_2\circ\tau,\cdots,\sigma_n\circ\tau\in I(K)$، وجميع هذه العناصر مختلفة لأنه إذا كان $\sigma_i\circ\tau=\sigma_j\circ\tau$ فإن

$$\sigma_i\circ\tau(A_1)=\sigma_j\circ\tau(A_1)$$

وبالتالي فإن $\sigma_i(A_1)=\sigma_j(A_1)$ أي أن $A_i=A_j$ وهذا محقق فقط عندما $i=j$ ومنه $\sigma_i=\sigma_j$. مما سبق نجد أن

$$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,\sigma_1\circ\tau,\sigma_2\circ\tau,\sigma_2\circ\tau,\cdots,\sigma_n\circ\tau\in I(K)$$

وهذه العناصر مختلفة مثنى مثنى، لأنه إذا كان $\sigma_i\circ\tau=\sigma_j$ عندئذ فإن

$$\sigma_j(A_1)=\sigma_i\circ\tau(A_1)=\sigma_i(A_1)$$

ومنه فإن $A_i=A_j$ وبالتالي $i=j$ أي أن $\sigma_i\circ\tau=\sigma_i$ وهذا يبين لنا أن $\sigma_1=\tau$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن الزمرة $D_n=I(K)$ تحوي $2n$ عنصراً على الأقل. لنبرهن على أن الزمرة $D_n=I(K)$ تحوي $2n$ عنصراً على الأكثر. ليكن $\sigma\in I(K)$ ولكون $K$ مضلع نوني منتظم فإنه توجد $n$ إمكانية لأجل تعيين الرأس $\sigma(A_1)$. وذلك لأن $\sigma(A_1)$ هو أحد الرؤوس $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ للمضلع. لنفرض أنه تم تعيين الرأس $\sigma(A_1)$ عندئذ فإن الرأس $\sigma(A_2)$ يتعين بطريقتين فقط إحداهما $\sigma(A_1)$ وتتعين بالشكل

$$d(\sigma(A_1),\sigma(A_2))=d(A_1,A_2)$$

والإمكانية الأخرى للرأس $\sigma(A_2)$ هي $\sigma(A_i)$ حيث $i=3,4,\cdots n$. وهذا يبين لنا أن الزمرة $D_n$ تحتوي على الأكثر $2n$ عنصر. مما سبق نجد أن $(D_n:1)=2n$. ∘

# تمارين محلولة (٤)

١ – ليكن $a \in \Re$. إن التطبيق $\sigma_a : \Re \to \Re$ المعرف بالشكل $\sigma_a(x) = x + a$ وذلك أياً كان $x \in \Re$ هو قياس على $\Re$ يسمى الانسحاب بمقدار $a$ ويحقق $\sigma_a^{-1} = \sigma_{-a}$.

**الحل.**

إن التطبيق $\sigma_a$ متباين، لأنه أيا كان $x, y \in \Re$ بحيث $\sigma_a(x) = \sigma_a(y)$ فإن $x+a = y+a$ وبالتالي $x = y$. كذلك $\sigma_a$ غامر، لأنه إذا كان $x \in \Re$ فإن $x - a \in \Re$ وبالتالي $\sigma_a(x-a) = (x-a)+a = x$. مما سبق نجد أن التطبيق $\sigma_a$ تقابل. لنبرهن على أن $d(\sigma_a(x),\sigma_a(y)) = d(x,y)$. لدينا

$$d(\sigma_a(x),\sigma_a(y)) = |\sigma_a(x)-\sigma_a(y)| = |(x+a)-(y+a)| = |x-y| = d(x,y)$$

ومنه فإن $\sigma_a$ هو قياس على $\Re$.

لنبرهن على أن $\sigma_a^{-1} = \sigma_{-a}$. بما أن $\sigma_a$ تقابل فإن $\sigma_a^{-1}$ موجود هو أيضا تقابل ويحقق $\sigma_a \circ \sigma_a^{-1} = I_\Re$ ومنه أيا كان $x \in \Re$ فإن $\sigma_a \circ \sigma_a^{-1}(x) = \sigma_a(\sigma_a^{-1}(x)) = x$ وبالتالي

$$\sigma_a \circ \sigma_a^{-1}(x) = \sigma_a(\sigma_a^{-1}(x)) = \sigma_a^{-1}(x) + a = x$$

ومنه

$$\forall x\in\Re;\quad \sigma_a^{-1}(x) = x - a = \sigma_{-a}(x)$$

أي أن $\sigma_a^{-1} = \sigma_{-a}$.

٢ – ليكن $a,b \in \Re$. إن التطبيق $\sigma_{a,b} : \Re^2 \to \Re^2$ المعرف بالشكل

$$\sigma_a(x,y) = (x+a, y+b)$$

وذلك أياً كان $(x,y)\in\Re^2$ هو قياس على $\Re^2$ يسمى الانسحاب بمقدار $(a,b)$ في المستوي $\Re^2$ ويحقق $\sigma_{a,b}^{-1} = \sigma_{-a,-b}$.

**الحل.**

إن التطبيق $\sigma_{a,b}$ متباين لأنه أيا كان $(x,y),(x_1,y_1)\in\Re^2$ بحيث $\sigma_{a,b}(x,y) = \sigma_{a,b}(x_1,y_1)$ فإن $(x+a,y+b) = (x_1+a, y_1+b)$ وبالتالي $x+a = x_1+a, y+b = y_1+b$. أي أن $x = x_1, y = y_1$ ومنه $(x,y) = (x_1,y_1)$.

كذلك $\sigma_{a,b}$ غامر لأنه إذا كان $(x,y)\in\Re^2$ فإن $(x-a,y-b)\in\Re^2$ وبالتالي $\sigma_a(x-a,y-b) = (x-a+a, y-b+b) = (x,y)$.

مما سبق نجد أن التطبيق $\sigma_{a,b}$ تقابل.

لنبرهن على أن $d(\sigma_{a,b}(x,y),\sigma_{a,b}(x_1,y_1)) = d((x,y),(x_1,y_1))$. إن

$$d(\sigma_{a,b}(x,y),\sigma_{a,b}(x_1,y_1)) = d((x,y),(x_1,y_1)) =$$
$$= d((x+a,y+b),(x_1+a,y_1+b)) =$$
$$= \sqrt{(x+a-(x_1+a))^2 + (y+b-(y_1+b))^2} =$$
$$= \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = d((x,y),(x_1,y_1))$$

وهذا يبين لنا أن التبديل $\sigma_{a,b}$ هو قياس. لنبرهن على أن $\sigma_{a,b}^{-1} = \sigma_{-a,-b}$. بما أن $\sigma_{a,b}$ تبديل فإن $\sigma_{a,b}^{-1}$ موجود ويحقق $\sigma_{a,b}\circ\sigma_{a,b}^{-1} = I_{\Re^2}$ ومنه أيا كان $(x,y)\in\Re^2$ فإن

$$\sigma_{-a,-b}\circ\sigma_{a,b}(x,y) = \sigma_{-a,-b}(x+a,y+b) = (x+a-a, u+b-b) = (x,y)$$

أي أن $\sigma_{a,b}\circ\sigma_{a,b}^{-1} = I_{\Re^2}$ وبالتالي فإن $\sigma_{a,b}^{-1} = \sigma_{-a,-b}$.

٣ – ليكن $y\in\Re$. إن التطبيق $\sigma_y:\Re^2\to\Re^2$ المعرف بالشكل $\sigma_y(x,y) = (x,-y)$ وذلك أياً كان $(x,y)\in\Re^2$ هو قياس على $\Re^2$ يسمى الانعكاس بالنسبة للمحور $ox$. ويحقق $\sigma_{-y}^{-1} = \sigma_y$.

**الحل.**

إن التطبيق $\sigma_y$ متباين لأنه أيا كان $(x,y),(x_1,y_1)\in\Re^2$ بحيث $\sigma_y(x,y) = \sigma_y(x_1,y_1)$ فإن $(x,-y) = (x_1,-y_1)$ وبالتالي $x = x_1, y = y_1$ ومنه $(x,y) = (x_1,y_1)$. كذلك $\sigma_y$ غامر لأنه إذا كان $(x,y)\in\Re^2$ فإن $(x,-y)\in\Re^2$ وبالتالي $\sigma_a(x,-y) = (x,-(-y)) = (x,y)$ مما سبق نجد أن $\sigma_y$ تبديل. لنبرهن على أن $\sigma_{-y}^{-1} = \sigma_y$. لتكن $(x,y)\in\Re^2$ عندئذ

$$\sigma_y^2(x,y) = \sigma_y\circ\sigma_y(x,y) = \sigma_y(x,-y) = (x,-(-y)) = (x,y)$$

أي أن $\sigma_y^2 = I_{\Re^2}$ وبالتالي فإن $\sigma_y = \sigma_y^{-1}$.

٤ – التطبيق $\rho_\Theta : \Re^2 \to \Re^2$ المعرف بالشكل

$$\rho_\Theta(x,y) = (x\cos\Theta - y\sin\Theta, x\sin\Theta + y\cos\Theta)$$

وذلك أياً كان $(x,y)\in\Re^2$ هو قياس على $\Re^2$ يسمى الدوران في المستوي $\Re^2$ بزاوية مقدارها $\Theta$ ويحقق $\rho_\Theta^{-1} = \rho_{-\Theta}$.

الحـل.

ليكن $(x,y),(x_1,y_1)\in\Re^2$ بحيث $\rho_\Theta(x,y)=\rho_\Theta(x_1,y_1)$ عندئذ

$$x\cos\Theta - y\sin\Theta = x_1\cos\Theta - y_1\sin\Theta$$

$$x\sin\Theta + y\cos\Theta = x_1\sin\Theta + y_1\cos\Theta$$

بضرب المعادلة الأولى بـ $\cos\Theta$ والثانية بـ $\sin\Theta$ ثم نجمع فنجد

$$x(\cos^2\Theta+\sin^2\Theta) = x_1(\cos^2\Theta+\sin^2\Theta)$$

ومنه $x=x_1$. نضرب المعادلة الأولى بـ $-\sin\Theta$ والثانية بـ $\cos\Theta$ وبالجمع نجد أن

$$y(\sin^2\Theta+\cos^2\Theta) = y_1(\sin^2\Theta+\cos^2\Theta)$$

ومنه $y=y_1$. كذلك فإن $\rho_\Theta$ غامر لأنه إذا كانت $(a,b)\in\Re^2$ فإن

$$x = a\cos\Theta - b\sin\Theta\in\Re, \quad y = a\sin\Theta + b\cos\Theta \in\Re$$

وبالتالي يكون

$$(x,y) = (a\cos\Theta - b\sin\Theta, a\sin\Theta+b\cos\Theta)\in\Re^2$$

وأن

$$\rho_\Theta(x,y) = (a(\cos^2\Theta+\sin^2\Theta), b(\sin^2\Theta+\cos^2\Theta)) = (a,b)$$

مما سبق نجد أن $\rho_\Theta$ تبديل. لنبرهن على أنه أياً كان $(x,y),(x_1,y_1)\in\Re^2$ فإن

$$d(\rho_\Theta(x,y),\rho_\Theta(x_1,y_1)) \in d((x,y),(x_1,y_1))$$

$$d(\rho_\Theta(x,y),\rho_\Theta(x_1,y_1)) =$$

$$d((x\cos\Theta - y\sin\Theta, x\sin\Theta+y\cos\Theta), x_1\cos\Theta - y_1\sin\Theta, x_1\sin\Theta+y_1\cos\Theta)) =$$

$$= \sqrt{\begin{array}{l}[(x\cos\Theta - y\sin\Theta) - (x_1\cos\Theta - y_1\sin\Theta)]^2 + \\ +[(x\sin\Theta+y\cos\Theta)-(x_1\sin\Theta+y_1\cos\Theta)]^2\end{array}} =$$



$$= \sqrt{[(x-x_1)\cos\Theta - (y-y_1)\sin\Theta]^2 + [(x-x_1)\sin\Theta + (y-y_1)\cos\Theta)]^2} =$$

$$= \sqrt{(x-x_1)^2(\cos^2\Theta+\sin^2\Theta) + (y-y_1)^2(\sin^2\Theta+\cos^2\Theta)} =$$

$$= \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = d((x,y),(x_1,y_1))$$

مما سبق نجد أن $\rho_\Theta$ هو قياس على $\Re^2$.

لنبرهن على أن $\rho_\Theta^{-1}=\rho_{-\Theta}$. ليكن $(x,y)\in\Re^2$ عندئذ

$$\rho_{-\Theta}\circ\rho_\Theta(x,y) = \rho_{-\Theta}(x\cos\Theta - y\sin\Theta, x\sin\Theta+y\cos\Theta) =$$

$$= ((x\cos\Theta - y\sin\Theta)\cos(-\Theta) - (x\sin\Theta+y\cos\Theta)\sin(-\Theta),$$

$$(x\cos\Theta-y\sin\Theta)\sin(-\Theta) + (x\sin\Theta+y\cos\Theta)\cos(-\Theta)) =$$

$$= (x(\sin^2\Theta+\cos^2\Theta), y(\sin^2\Theta+\cos^2\Theta)) = (x,y)$$

وهذا يبين لنا أن $\rho_{-\Theta}^{-1}\circ\rho_\Theta = I_{\Re^2}$ وبالتالي $\rho_\Theta^{-1}=\rho_{-\Theta}$.

٥ – لندرس بشيء من التفصيل الزمرتين $S_3$ و $S_4$ ولكن قبل ذلك لنتعرف على تناظر الأشكال الهندسية في المستوي. إن الشكل الهندسي في المستوي يمكن أن يملك محور تناظر واحد أو أكثر. حيث إن محور التناظر لأي شكل هندسي هو المحور الذي يقسم هذا الشكل إلى جزئين متساويين.

إذا وجد للشكل الهندسي في المستوي محور تناظر، نقول عن هذا الشكل إنه متنـــاظر بالنسبة إلى هذا المحور.نوع آخر من التناظر للأشكال الهندسية فـــي المســـتوي هـــو التناظر بالنسبة إلى النقطة التي تسمى مركز التناظر.

إن التناظر بالنسبة إلى النقطة يمكن تعميمه بالشكل التالي: نقول عن النقطـــة $o$ إنهـــا مركز تناظر من المرتبة $n$ للشكل الهندسي $M$ إذا كان الشكل الهندسي ينطبـــق علـــى نفسه عبر دورانه (حول مركز التناظر) بزاوية $k\frac{2\pi}{n}$، حيث $n$ عدد صحيح موجـــب و $k = 0,1,2,3,\cdots,(n-1)$. فعلى سبيل المثال المربع له مركز تنـــاظر مـــن المرتبـــة الرابعة. يوجد لكل نوع من أنواع التناظر تبديل يسمى تبديل تنـــاظر(متنـــاظر) وهـــو تبديل لمجموعة متناظرة (بالنسبة لنقطة أو محور) من نقاط المســـتوي.فعلـــى ســـبيل المثال، إذا كانت النقطة $o$ مركز تناظر من المرتبة $n$ فإن التبديل المتناظر بالنسبة إلى هذا المركز هو التبديل الذي ينتج عن دوران جميع النقاط في المســـتوي (المتنـــاظرة

بالنسبة إلى المركز $o$) حول $o$ بزاوية قدرها $\frac{2\pi}{n}$ (مع أو عكس عقارب الساعة).لنوضح من خلال بعض الأمثلة زمرة التباديل للأشكال الهندسية المتناظرة.

**٦ – الزمرة التناظرية للمثلث المنتظم (متساوي الأضلاع).**

لنرقم رؤوس المثلث المنتظم بالأعداد 1,2,3. كما نعلم فإن مجموعة التباديل للمجموعة $\{1,2,3\}$ تشكل زمرة بالنسبة إلى عملية تركيب التطبيقات. وعناصر هذه الزمرة هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{bmatrix}$$

حيث $i_k = \varphi(k)$ هو رقم المكان الذي يشغله الرأس رقم $k$ بعد إجراء التبديل $\varphi$، حيث $k = 1,2,3$. إن مركز تناظر المثلث المنتظم $o$ هو مركز تناظر من المرتبة الثالثة حيث إن الدورانات $\varphi_1 = \varepsilon, \varphi_2, \varphi_3$ حول المركز $o$ بزوايا $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ على الترتيب تعيد المثلث إلى وضعه الأول. كما أن للمثلث المنتظم ثلاث محاور تناظر وأن التباديل $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ تعين محاور التناظر $l, n, m$ على الترتيب، المارة من رؤوس المثلث ومركزه. لنوجد التباديل التناظرية لهذا المثلث.

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1), \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (123), \quad \varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (132)$$

وهذه التباديل تمثل الدورانات حول المركز $o$.

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (23), \quad \varphi_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (13), \quad \varphi_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (12)$$

وهذه التباديل تمثل التباديل المتناظرة بالنسبة إلى محاور التناظر. بالاضافة لذلك نلاحظ أن $\varphi_i^3 = \varepsilon$ حيث $i = 1,2,3$ وأن $\varphi_j^2 = \varepsilon$ حيث $j = 4,5,6$. نلاحظ أيضا أن $\varphi_2$ يولد جميع الدورانات حول المركز $o$. إن زمرة التباديل $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$ للمثلث المنتظم يرمز لها بالرمز $D_3$ وهي زمرة مرتبتها 6 .



٧ – الزمرة التناظرية للمربع.

لنرقم رؤوس المربع بالأرقام $\{1,2,3,4\}$. إن أي حركة للمربع تتم عبر دورانه حول مركز تناظر هو هذه الدورانات هي $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ بزوايا $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ على الترتيب. أو من خلال دورانه حول محاور التناظر $m, k, n, l$ و التي سوف نرمز لها $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ على الترتيب. إن الدورانات $\alpha_i$ حيث $1 \le i \le 8$ تمثل زمرة التباديل للمجموعة $\{1,2,3,4\}$ وهي

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = (1), \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = (1234)$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (13)(24) \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1432)$$

وهذه التباديل تمثل الدورانات حول المركز ونلاحظ هنا أن $\alpha_i^4 = \alpha_1 = \varepsilon$ حيث $i = 1,2,3,4$ وأن التبديل $\alpha_2$ يعد مولداً لهذه التباديل. كما أن الدورانات حول محاور التناظر فهي

$$\alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (12)(34); \quad \alpha_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (14)(23)$$

$$\alpha_7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (24), \quad \alpha_8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = (13)$$

ونلاحظ هنا أيضا أن $\alpha_j^2 = \varepsilon$ حيث $j = 5,6,7,8$ .


$$\alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (12)(34), \quad \alpha_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (14)(23)$$

$$\alpha_7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (24), \quad \alpha_8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = (13)$$

ونلاحظ هنا أيضا أن $\alpha_j^2 = \varepsilon$ حيث $j = 5,6,7,8$ .


٨ – أوجد جميع الزمر الجزئية من الزمرة التناظرية $S_3$.

**الحل.**

لدينا $\langle e \rangle, S_3$ زمر جزئية في $S_3$.

من جهة أخرى، بما أن كل عنصر من $S_3$ يولد زمرة جزئية وحسب مبرهنة لاغرانج فإن مرتبة هذا العنصر يجب أن يقسم مرتبة الزمرة $S_3$ وبمـــا أن $(S_3:1)=6$ فإنـــه توجد لدينا عناصر في $S_3$ مراتبها $1,2,3$. وبالتالي يوجد في $S_3$:

- عنصر واحد مرتبته 1 هو العنصر الحيادي.
- ثلاثة عناصر مرتبة كل منها تساوي 2 وهي $(12),(13),(23)$.
- عنصران مرتبة كل منهما تساوي 3 وهي $(123),(132)$.

ومنه يوجد في $S_3$ ثلاث زمر جزئية مرتبة كل منها تساوي 2 وهي

$$T=\{1,(12)); \quad U=\{1,(13)\}; \quad V=\{1,(13)\}$$

وزمرتان مرتبة كل منهما تساوي 3 وهما

$$K=\{1,(123),(123)^2\}; \quad H=\{1,(132),(132)^2\}$$

وبملاحظة أن $(123)^2=(132)$ نجد أن $K=H$ أي توجد زمرة واحدة فقط مرتبتهـــا 3. ๐



# تمـــارين ( ٤ )

١- أوجد مرتبة كل من التباديل التالية:
- $(14762),(147),(14)$.
- $(124)(3578),(124)(356),(124)(357)$.

٢- بين أي من التباديل التالية زوجي و أيا منها فردي.
$(13567),(1356),(135),(12)(134)(152),(1243)(3521)$.

٣- لتكن $S$ مجموعة منتهية و $f:S\to S$ تابع (تطبيق). أثبت أن الشرط الـــلازم و الكافي كي يكون $f$ متباين هو أن يكون $f$ غامراً.

٤- ليكن $\alpha$ تبديلاً ما.أثبت أنه إذا كان $\alpha$ زوجياً فإن $\alpha^{-1}$ زوجياً وأنه إذا كان $\alpha$ فرديا فإن $\alpha^{-1}$ فردي.

٥- لتكن $H=\{\beta\in S_5,\beta(1)=1,\beta(3)=3\}$ . أثبت أن $H$ زمرة جزئية من $S_5$.

٦- ليكن
- $\alpha:Z\to Z$ تطبيق معرف بالشكل $\alpha(n)=n+1$ وذلك أياً كان $n\in Z$.
- $\beta:Z\to Z$ تطبيق معرف بالشكل $\beta(2n)=2n$ و $\beta(2n+1)=2n+3$ وذلك أياً كان $n\in Z$.
- $\gamma:Z\to Z$ تطبيق معرف بالشكل

$$\gamma(2n)=2(n+1) \text{ و } \gamma(2n+1)=2n+1$$

وذلك أياً كان $n\in Z$.

أثبت أن كلاً من $\alpha,\beta,\gamma$ هي تباديل للمجموعة $Z$ وأن $\beta\circ\gamma=\gamma\circ\beta=\alpha\circ\alpha$.

٧- لنفرض أن $K$ مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ولنأخذ المجموعة

$$I(K)=\{\Theta:\Theta\in I(K); \quad \Theta(s)\in K; \quad \forall s\in K\}$$

أثبت أن المجموعة $I(K)$ زمرة جزئية من الزمرة $I(\Re)$.

٨- لنفرض أن $Q$ مجموعة الأعداد العادية ولنأخذ المجموعة

$$I(Q)=\{\Theta:\Theta\in I(\Re);\quad \Theta(q)\in Q;\quad \forall q\in Q\}$$

أثبت أن المجموعة $I(Q)$ زمرة جزئية من الزمرة $I(\Re)$.

٩- ليكن

$$\alpha=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&3&5&4&6\end{bmatrix}\qquad \beta=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&2&4&3&5\end{bmatrix}$$

أوجد كلاً من

$$\alpha^{-1};\quad \alpha\beta;\quad \beta\alpha$$

١٠ - ليكن

$$\alpha=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&3&5&4&7&6&8\end{bmatrix}\qquad \beta=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&3&8&7&6&5&2&4\end{bmatrix}$$

اكتب كلاً من $\alpha,\beta$ بالشكل التالي:

- على شكل جداء لأدوار مختلفة.
- على شكل جداء لـ 2-دور.

١١ - ليكن $\alpha,\beta\in S_n$. أثبت أن التبديل $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ هو تبديل زوجي.

١٢ - أوجد عدد العناصر من المرتبة الخامسة في الزمرة $S_6$.

١٣ - في الزمرة $A_5$ أحسب الجداءات التالية:

$$(123);\quad (235);\quad (145)$$

- أوجد $x^{-1}yx$ إذا كان

$$x=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&3&5\end{bmatrix};\qquad y=(135)(24)$$

- أوجد $x^{-1}yx$ إذا كان

$$x=(123);\qquad y=(13)$$



# الفصل الخامس

## الزمرة الجزئية الناظمية و زمرة الخارج

### ٥-١ . الزمرة الجزئية الناظمية.

وجدنا من خلال دراستنا للمرافقات اليسارية واليمينية أنه إذا كانت $H$ زمرة جزئية من الزمرة $G$ و $a\in G$ فليس من الضروري أن يكون $aH=Ha$. إذ توجد حالات محددة من أجلها $aH\neq Ha$. لأجل ذلك سوف ندخل المفهوم التالي:

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. نقول عن الزمرة الجزئية $H$ إنها ناظمية في $G$ إذا تحقق الشرط التالي: أيا كان $a\in G$ فإن $aH=Ha$.

ينتج مباشرة من التعريف ما يلي:

- لأجل أية زمرة $G$ فإن كلاً من $G$ و $\langle e\rangle$ زمر جزئية ناظمية في $G$.
- كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية تكون ناظمية.

هناك العديد من الشروط المكافئة لمفهوم الزمرة الناظمية. في هذه الفقرة سوف نختار أحد هذه الشروط التي تعتبر أسهل في التطبيق وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٥-١-١.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. الشروط التالية متكافئة:

١- الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$.

٢- أياً كان $a\in G$ فإن $aHa^{-1}\subseteq H$.

٣- أياً كان $a\in G$ فإن $a^{-1}Ha\subseteq H$.

**البرهان.**

(١)⇐(٢).لنفرض أن الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$ عندئذ $aH=Ha$ ومنه $aHa^{-1}\subseteq H$.

(٢)⇐(٣). واضح.

(٣)⇐(١). ليكن $a \in G$ عندئذ $a^{-1}Ha \subseteq H$. من جهة أخرى، بما أن $a^{-1} \in G$ فإن $aHa^{-1} \subseteq H$ ومنه $H \subseteq a^{-1}Ha$. مما سبق نجد أن $H = a^{-1}Ha$، وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$.

بعض الخواص للزمرة الجزئية الناظمية سوف نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٥-١-٢.**

لتكن $G$ زمرة. القضايا التالية صحيحة:

١- تقاطع أية أسرة من الزمر الجزئية الناظمية من $G$ هو زمرة جزئية ناظمية في $G$.

٢- الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في $G$.

٣- لتكن $H$ و $K$ زمرتين جزئيتين في $G$ بحيث $K \subseteq H$. إذا كانت الزمرة الجزئية $K$ ناظمية في $G$ فإن الزمرة $K$ تكون ناظمية في $H$.

٤- إذا كانت $H$ زمرة جزئية في $G$ وكان $(G:H) = 2$، عندئذ تكون الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$.

**البرهان.**

١ - لتكن $\{M_i : \quad i \in I\}$ أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في $G$. وجدنا سابقاً أن $M = \bigcap_{i \in I} M_i$ زمرة جزئية في $G$. لنبرهن على أن $gMg^{-1} \subseteq M$ وذلك أياً كان $g \in G$. ليكن $g \in G$ عندئذ أيا كان $z \in gMg^{-1}$ يوجد $x \in M$ بحيث $z = gxg^{-1}$. وبما أن الزمرة $M_i$ ناظمية في $G$ وذلك $\forall i \in I$ فإن $z = gxg^{-1} \in M_i$ وذلك $\forall i \in I$ ومنه $z \in \bigcap_{i \in I} M_i = M$. وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية $M$ ناظمية في $G$.

٢ - وجدنا سابقاً أن المجموعة

$$Z(G) = \{a : a \in G; \quad ax = xa \quad \forall x \in G\}$$

زمرة جزئية في $G$. لنبرهن أن $bZ(G)b^{-1} \subseteq Z(G)$ وذلك $\forall b \in G$. أياً كان $y \in Z(G)$ فإن $byb^{-1} = ybb^{-1} = y \in Z(G)$ وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية



$Z(G)$ ناظمية في $G$.

٣ - بما أن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ عندئذ $aKa^{-1} \subseteq K$ وذلك $\forall a \in G$. وبالتالي فإن $hKh^{-1} \subseteq K$ وذلك $\forall h \in H$ وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية $K$ ناظمية في $H$.

٤ - لتكن $H$ زمرة جزئية في $G$ تحقق $(G:H) = 2$ وهذا يبين أن مجموعة المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة $H$ في $G$ هي $\{H, aH\}$ حيث $a \in G$. وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $a \in H$ عندئذ $aH = Ha$.
- إذا كان $a \notin H$ عندئذ بما أن $G = H \cup aH$ نجد أن $aH = G \setminus H = Ha$ وفي كلا الحالتين يتبين لنا أن الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$.

إن جداء زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية. المبرهنة التالية تعطينا الشرط اللازم والكافي كي يكون جداء أي زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية:

**مبرهنة ٥-١-٣.**

لتكن $G$ زمرة و $A, B$ زمرتين جزئيتين في $G$. القضايا التالية متكافئة:

١- $AB$ زمرة جزئية في $G$.

٢- $AB = \langle A \cup B \rangle$.

٣- $AB = BA$.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). لنفرض أن الجداء $AB$ زمرة جزئية من $G$. عندئذ $a = ae \in AB \quad \forall a \in A;$ كذلك $b = eb \in AB \quad \forall b \in B;$ ومنه $A \cup B \subseteq AB$ وهذا يبين لنا أن $\langle A \cup B \rangle \subseteq AB$.

ليكن $x \in AB$ عندئذ يوجد $c \in A$ و $d \in B$ بحيث $x = cd$ ومنه $c, d \in A \cup B \subseteq \langle A \cup B \rangle$ وهذا يبين لنا أن $x = cd \in \langle A \cup B \rangle$ وهكذا فإن $AB \subseteq \langle A \cup B \rangle$. مما سبق نجد أن $AB = \langle A \cup B \rangle$.

(٢) ⇐ (٣). بفرض $AB=\langle A\cup B\rangle$ عندئذ الجداء $AB$ زمرة جزئية من $G$. ليكن $y\in AB$ عندئذ $y^{-1}\in AB$ ومنه $y^{-1}=ab$ حيث $a\in A,b\in B$ وهكذا فإن $y=b^{-1}a^{-1}\in BA$ أي أن $AB\subseteq BA$.

ليكن $z\in BA$ عندئذ $z=cd$ حيث $c\in D,d\in A$ ومنه فإن $z=(d^{-1}c^{-1})^{-1}\in AB$ وبالتالي $BA\subseteq AB$. مما سبق نجد أن $AB=BA$.

(٣) ⇐ (١). لنفرض أن $AB=BA$. واضح أن $AB\neq\Phi$. ليكن $x,y\in AB$ عندئذ $x=ab$ و $y=a_1b_1$ حيث $a,a_1\in A$ و $b,b_1\in B$. وهكذا نجد أن $xy^{-1}=a(bb_1^{-1})a_1^{-1}$. لنفرض أن $b_0=bb_1^{-1}\in B$ عندئذ $xy^{-1}=a(b_0)a_1^{-1}$ وبما أن $b_0a_1^{-1}\in BA=AB$ فإنه يوجد $a_0\in A$ و $b_2\in B$ بحيث $b_0a_1^{-1}=a_0b_2$ وهذا يبين لنا أن $xy^{-1}=ab_0a_1^{-1}=aa_0b_2\in AB$. مما سبق نجد أن الجداء $AB$ زمرة جزئية من $G$. ₀

شرط آخر كي يكون جداء زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية نورده من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٥-١-٤.**

لتكن $G$ زمرة و$A,B$ زمرتين جزئيتين في $G$. اذا كانت الزمرة $B$ ناظمية في $G$. عندئذ:

١- الجداء $AB$ زمرة جزئية من $G$.

٢- $AB=BA$.

٣- $AB=\langle A\cup B\rangle$.

**البرهان.**

١ – واضح أن $AB\neq\Phi$. ليكن $x,y\in AB$ عندئذ يوجد $a_1,a_2\in A$ و $b_1,b_2\in B$ بحيث $x=a_1a_2$ و $y=b_1b_2$ ومنه $xy^{-1}=a_1b_1b_2^{-1}a_2^{-1}=a_1b_1a_2^{-1}(a_2b_2^{-1}a_2^{-1})$. لنفرض أن $a_2b_2^{-1}a_2^{-1}=b_0$ عندئذ $b_0\in B$ وذلك لأن الزمرة الجزئية $B$ ناظمية في $G$ ومنه



$$xy^{-1}=a_1b_1a_2^{-1}b_0=a_1a_2^{-1}(a_2b_1a_2^{-1})b_0.$$

أيضا، بما أن $B$ ناظمية في $G$ فإن $a_2b_1a_2^{-1}=b'\in B$. وهكذا نجد أن $xy^{-1}=a_1a_2^{-1}b'b_0\in AB$ وهذا يبين لنا أن الجداء $AB$ زمرة جزئية من $G$.

(٢) و (٣) ينتج بشكل مباشر من المبرهنة الأخيرة. ₀

خواص إضافية أخرى للزمرة الجزئية الناظمية و التي سوف تكون ضرورية لنا في دراستنا المقبلة نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٥-١-٥.**

لتكن $G$ زمرة و$A,B$ زمرتين جزئيتين في $G$. القضايا التالية صحيحة:

١ – إذا كانت كل من الزمرتين $A,B$ ناظمية في $G$ فإن الجداء $AB$ هو زمرة جزئية ناظمية في $G$.

٢ – إذا كانت كل من الزمرتين $A,B$ تبديلية و ناظمية في $G$ وإذا كان $A\cap B=\langle e\rangle$ فإن الجداء $AB$ هو زمرة تبديلية.

٣- إذا كانت الزمرة $A$ ناظمية في $G$ ودوارة فإن أية زمرة جزئية من $A$ تكون ناظمية في $G$.

**البرهان.**

١- لنفرض أن كلاً من الزمرتين $A,B$ ناظمية في $G$. عندئذ بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة نجد أن الجداء $AB$ هو زمرة جزئية في $G$. لنبرهن الآن على تحقق الشرط

$$\forall g\in G;\quad g(AB)g^{-1}\subseteq AB.$$

ليكن $z\in g(AB)g^{-1}$ عندئذ يوجد $a\in A,b\in B$ بحيث

$$z=g(ab)g^{-1}=(gag^{-1})(gbg^{-1})\in AB$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $AB$ ناظمية في $G$.

٢ – لنفرض أن كلاً من الزمرتين $A,B$ تبديلية و ناظمية في $G$ وأن $A\cap B=\langle e\rangle$ عندئذ أياً كان $a\in A,b\in B$ فإن $(ab)(a^{-1}b^{-1})=(aba^{-1})b^{-1}\in B$ كذلك

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = a(ba^{-1}b^{-1}) \in A$$

مما سبق نجد أن $ab = ba$ وبالتالي الزمرة الجزئية $AB$ تبديلية.

٣ – لنفرض أن الزمرة $A$ ناظمية في $G$ وأن $A = \langle a \rangle$ حيث $a \in A$. لتكن $T$ زمـرة جزئية من $A$ عندئذ فإن $T$ زمرة جزئيـة فـي $G$ ودوارة. لنفـرض أن $T = \langle a^m \rangle$. لنفرض على أنه $gTg^{-1} \subseteq T$ $\forall g \in G$; ليكن $z \in gTg^{-1}$ عندئذ يوجد $(a^m)^k \in T$ بحيث $z = g(a^m)^k g^{-1}$ ومنه بما أن الزمـرة الجزئيـة $A$ ناظميـة فـي $G$ فـإن $(gag^{-1})^k = ga^k g^{-1} \in A$ وبالتالي $ga^k g^{-1} = a^s$ حيث $s \in Z$ وهذا يبين لنا أن

$$z = g(a^m)^k g^{-1} = g(a^k)^m g^{-1} = [(gag^{-1})^k]^m = (a^s)^m = (a^m)^s \in T$$

وهذا يبين لنا أن $T$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. ه

توجد علاقة هامة بين جداء الزمر الجزئية وتقاطعها لا بد من ذكرها هنا وذلك من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيديـــة ٥-١-٦.**

لتكن $A,B,D$ زمر جزئية من الزمرة $G$ بحيث $A \subseteq B$. عندئذ

١ – $A(B \cap D) = AB \cap AD$.

٢ – $(B \cap D)A = BA \cap DA$.

**البرهـــان.**

١ – ليكن $x \in A(B \cap D)$ عندئذ $x = ab$ حيـث $a \in A, b \in (B \cap D)$ وبالتـالي $b \in B, b \in D$ ومنه $x = ab \in AD, x = ab \in AB$ وبالتـالي $x \in AD \cap AB$ أي أن $A(B \cap D) \subseteq AB \cap AD$.

ليكن $y \in AB \cap AD$ عندئذ $y \in AB$ ومنه $y = a_1 b_1$ حيث $a_1 \in A, b_1 \in B$. كذلك $y \in AD$ ومنه $y = a_2 d$ حيث $a_2 \in A, d \in D$. وبما أن $a_1 b_1 = a_2 d$ ومنه

$$d = a_2^{-1}(a_1 b_1) = (a_2^{-1} a_1) b_1 \in A \cap D$$

وذلك لأن $A \subseteq B$ ومنه $y = a_2 d \in A(B \cap D)$ أي أن $AB \cap AD \subseteq A(B \cap D)$.

مما سبق نجد أن $A(B \cap D) = AB \cap AD$.



٢ – يبرهن بشكل مشابه ولذلك نتركه تمريناً للقارئ. ه

## ٥-٢. زمـــرة الخـــارج.

الخاصة الهامة التي تتميز فيها الزمرة الجزئية الناظمية عن غيرهـا مـن الزمـر الجزئية هو أن كل مرافقة يسارية (يمينية) لها تكون زمرة جزئية أيضا. فإذا كانت $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ عندئذ، أيا كان $a \in G$ فإن $aH = Ha$. وهـذا يبين لنا أن مجموعة المرافقات اليسارية تساوي مجموعة المرافقات اليمينية للزمرة $H$ في $G$. وقد وجدنا سابقا أن مجموعة المرافقات اليسارية للزمـرة $H$ فـي $G$ تشـكل تجزئة للزمرة $G$ وهذه التجزئة تعرف لنا علاقة تكافؤ $\rho$ على $G$ وهذه العلاقة تكـون معرفة بالشكل

$$\forall a,b \in G; \quad a\rho b \Leftrightarrow aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

(تأكد من ذلك) إن صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي عناصر المجموعة التي تشكل تجزئة للزمرة $G$. بمعنى آخر، صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي المرافقات اليسارية للزمرة $H$ في $G$. سوف نرمز لمجموعة صفوف تكافؤ هذه العلاقة بالرمز $G/H$. فنجد أن

$$G/H = \{aH: \quad a \in H\}.$$

خواص هذه المجموعة و بنيتها الجبرية توضحها المبرهنة التالية:

**مبرهنـــة ٥-٢-١.( هولدر ١٨٨٩).**

لتكن $G$ زمرة و$H$ زمرة جزئيـــة ناظميـــة فـــي $G$. لنعـــرف علـــى المجموعـــة $G/H = \{aH: \quad a \in H\}$ العملية (.) بالشكل التالي:

$$\forall aH, bH \in G/H; \quad (aH)(bH) = (ab)H$$

عندئذ:

١– العملية (.) داخلية.

٢– العملية (.) معرفة جيداً.

٣– العملية (.) تجميعية.

٤– يوجد في $G/H$ عنصر حيادي هو $H$.

٥- لكل عنصر $aH \in G/H$ مقلوب هو $a^{-1}H \in G/H$.

٦- المجموعة $G/H$ زمرة بالنسبة للعملية $(.)$.

**البرهان.**

١ - كون العملية $(.)$ داخلية، ينتج ذلك من التعريف مباشرة.

٢ - ليكن $aH, a'H, bH, b'H \in G/H$ بحيث $aH = a'H$ و $bH = b'H$ عندئذ

يوجد $h_1, h_2 \in H$ بحيث $a' = ah_1$ , $b' = bh_2$ وهذا يبين لنا أن

$$(a'H)(b'H) = (a'b')H = (ah_1)(bh_2)H = (ah_1b)H = (ah_1)Hb =$$
$$= aHb = (ab)H = (aH)(bH)$$

٣ - ليكن $aH, bH, dH \in G/H$ عندئذ

$$[(aH)(bH)]dH = [(ab)H]]dH = [(ab)d]H = [a(bd)]H = (aH)[(bd)H] =$$
$$= (aH)[(bH)(dH)]$$

٤ - ليكن $aH \in G/H$ عندئذ وبما أن $H = eH$ نجد أن

$$(aH)H = (aH)(eH) = (ae)H = aH$$

بشكل مشابه نجد أيضاً $H(aH) = aH$.

٥ - ليكن $aH \in G/H$ عندئذ $a^{-1}H \in G/H$ ومنه

$$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$$

بشكل مشابه نجد أن $(a^{-1}H)(aH) = H$.

٦ - مما سبق نجد أن المجموعة $G/H$ مع العملية $(.)$ تشكل زمرة. ∘

**تعريف.**

نسمي الزمرة المعرفة في المبرهنة السابقة زمرة الخارج للزمرة $G$ وفق $H$.

سوف نورد الآن بعض الأمثلة التي توضح لنا مفهوم زمرة الخارج.

**مثال.**

في زمرة الأعداد الصحيحة $Z$ نعلم أن المجموعة

$$4Z = \{0,\pm4,\pm8,\pm12,\pm16,\cdots\}$$

زمرة جزئية من $Z$، وبما أن الزمرة $Z$ تبديلية، فإن الزمرة الجزئية $4Z$ تكون ناظمية



في $Z$ . إن المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $4Z$ في $Z$ هي:

$$0+4Z = 4Z = \{0,\pm4,\pm8,\pm12,\pm16,\cdots)$$
$$1+4Z = \{1,5,9,13,\cdots,-3,-7,-11,\cdots\}$$
$$2+4Z = \{2,6,10,14,\cdots,-2,-6,-10,\cdots\}$$
$$3+4Z = \{3,7,11,15,\cdots,-1,-5,-9,\cdots\}$$

$$4+4Z = 4Z; \quad 5+4Z = 1+4Z$$
$$6+4Z = 2+4Z; \quad 7+4Z = 3+4Z$$

ومنه نجد أن المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة $4Z$ في $Z$ هي

$$4Z; \quad 1+4Z; \quad 2+4Z; \quad 3+4Z$$

وبالتالي فإن زمرة الخارج $Z/4Z$ هي:

$$Z/4Z = \{4Z; \quad 1+4Z; \quad 2+4Z; \quad 3+4Z\}.$$

وبذلك يمكن الحصول على الجدول التالي بالنسبة إلى العملية$(+)$المعرفة على $Z/4Z$:

| | $4Z$ | $1+4Z$ | $2+4Z$ | $3+4Z$ |
|---|---|---|---|---|
| $4Z$ | $4Z$ | $1+4Z$ | $2+4Z$ | $3+4Z$ |
| $1+4Z$ | $1+4Z$ | $2+4Z$ | $3+4Z$ | $4Z$ |
| $2+4Z$ | $2+4Z$ | $3+4Z$ | $4Z$ | $1+4Z$ |
| $3+4Z$ | $3+4Z$ | $4Z$ | $1+4Z$ | $2+4Z$ |

**مثال.**

لنأخذ الزمرة:

$$Z_{18} = \{0,1,2,3,4,5,\cdots,17)$$

وجدنا سابقاً أن $\langle \frac{18}{3} \rangle$ هي زمرة جزئية في $Z_{18}$ و ناظمية لأن الزمرة $Z_{18}$ تبديلية.

لنفرض أن $H = \langle \frac{18}{3} \rangle$ فنجد أن $H = \langle \frac{18}{3} \rangle = \langle 6 \rangle = \{0,6,12\}$ . وأن المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H$ في $Z_{18}$ هي:

$$0+H=\{0,6,12\}=H=6+H=12+H$$
$$3+H=\{3,9,15\}=9+H=15+H$$
$$1+H=\{1,7,13\}=7+H=13+H$$
$$4+H=\{4,10,16\}=10+H=16+H$$
$$2+H=\{2,8,14\}=8+H=14+H$$
$$5+H=\{5,11,17\}=11+H=17+H$$

وهكذا نجد أن المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية $H$ في $Z_{18}$ هي:

$$H;\quad 1+H;\quad 2+H;\quad 3+H;\quad 4+H;\quad 5+H$$

وبالتالي فإن زمرة الخارج $Z_{18}/H$ هي

$$Z_{18}/H=\{H,1+H,2+H,3+H,4+H,5+H\}$$

والجدول التالي يبين لنا العملية (+) المعرفة على $Z_{18}/H$.

| | $H$ | $1+H$ | $2+H$ | $3+H$ | $4+H$ | $5+H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $H$ | $H$ | $1+H$ | $2+H$ | $3+H$ | $4+H$ | $5+H$ |
| $1+H$ | $1+H$ | $2+H$ | $3+H$ | $4+H$ | $5+H$ | $H$ |
| $2+H$ | $2+H$ | $3+H$ | $4+H$ | $5+H$ | $H$ | $1+H$ |
| $3+H$ | $3+H$ | $4+H$ | $5+H$ | $H$ | $1+H$ | $2+H$ |
| $4+H$ | $4+H$ | $5+H$ | $H$ | $1+H$ | $2+H$ | $3+H$ |
| $5+H$ | $5+H$ | $H$ | $1+H$ | $2+H$ | $3+H$ | $4+H$ |

إن أهمية زمرة الخارج لزمرة ما تكمن في أن زمرة الخارج في كثير من الأحيان تعطينا بعض المعلومات عن الزمرة نفسها، والمبرهنة الأولى التي تبين لنا ذلك سوف نوردها الآن.

**مبرهنة ٥-٢-٢.**

لتكن $G$ زمرة. إذا كانت الزمرة $G/Z(G)$ دوارة عندئذ تكون الزمرة $G$ تبديلية.

**البرهان.**

لنفرض أن الزمرة $G/Z(G)$ دوارة مولدة بالعنصر $g.Z(G)$ حيث $g\in G$.

وليكن $a,b\in G$ عندئذ يوجد $i,j\in Z$ بحيث



$$a.Z(G)=(g.Z(G))^i=g^i.Z(G) \text{ و } b.Z(G)=(g.Z(G))^j=g^j.Z(G)$$

وهكذا نجد أن $a=g^ix,\quad b=g^jy$ حيث $x,y\in Z(G)$ ومنه

$$ab=(g^ix)(g^jy)=g^i(xg^jy)=(g^ig^j)(xy)=$$
$$=(g^jg^i)(xy)=(g^jy)(g^ix)=ba$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ تبديلية. ∘

المبرهنة التالية تبين لنا طبيعة الزمر الجزئية في زمرة الخارج.

**مبرهنة ٥-٢-٣.**

لتكن $G$ زمرة و$H$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. كل زمرة جزئية من الزمرة $G/H$ هي من الشكل $D/H$ حيث $D$ زمرة جزئية من $G$ تحوي $H$.

**البرهان.**

لتكن $\overline{D}$ زمرة جزئية من الزمرة $G/H$. ولنبرهن أن $\overline{D}=D/H$ حيث $D$ زمرة جزئية من $G$ تحوي $H$. لنأخذ المجموعة

$$D=\{g:g\in G;\quad gH\in\overline{D}\}$$

بما أن $\overline{D}$ زمرة جزئية من $G/H$ فإن $eH=H\in\overline{D}$ ومنه $e\in D$ وبالتالي $D\neq\Phi$.

ليكن $x,y\in D$ عندئذ $xH,yH\in\overline{D}$ ومنه

$$(xy)^{-1}H=(xH)(y^{-1}H)=(xH)(yH)^{-1}\in\overline{D}$$

وهكذا نجد أن $xy^{-1}\in D$ وبالتالي $D$ زمرة جزئية من $G$. ليكن $h\in H$. بما أن $hH=H\in\overline{D}$ فإن $h\in D$، أي أن $H\subseteq D$.

ليكن $\overline{d}\in\overline{D}$ عندئذ $\overline{d}\in G/H$ وبالتالي $\overline{d}=dH$ ولكون $\overline{d}\in\overline{D}$ فإن $d\in D$ ومنه $\overline{d}\in D/H$ أي أن $\overline{D}\subseteq D/H$. ليكن $cH\in D/H$ عندئذ $c\in D$ ومنه $cH\in\overline{D}$ أي أن $D/H\subseteq\overline{D}$. مما سبق نجد أن $\overline{D}=D/H$. ∘

# تمـــارين محلـــولة (٥)

١- لتكن $G=U(32)$ و $H=U_{16}(32)$. أوجد زمرة الخارج $G\setminus H$.

**الحـــل.**

لدينا

$$G=U(32)=\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31\}$$

إن $(G:1)=16$. كما أن $H=U_{16}(32)=\{1,17\}$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. لنوجد جميع المرافقات اليسارية للزمرة $H$ في $G$. إن

$$1H=\{1,17\},\quad 3H=\{3,19\},\quad 5H=\{5,21\},\quad 7H=\{7,23\}$$

$$9H=\{9,25\},\quad 11H=\{11,27\},\quad 13H=\{13,29\},\quad 15H=\{15,31\}$$

جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة $H$ في $G$. أي أن

$$G/H=\{1H,3H,5H,7H,9H,11H,13H,15H\}$$ ٥

٢- لتكن $N$ زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $G$. لنفرض أن $(G/N:1)=m$.

أ- أثبت أن $x^m\in N$ وذلك أياً كان $x\in G$.

ب- ليكن $g\in G$ وأن $g^n\in N$ حيث $n\in N^*$ وأن $\gcd(n,m)=1$ عندئذ $g\in N$.

**الحـــل.**

أ- ليكن $x\in G$. نميز حالتين:

- إذا كان $x\in N$ عندئذ $x^m\in N$.
- إذا كان $x\notin N$ عندئذ $xN\in G\setminus N$ وبما أن مرتبة الزمـرة $G\setminus N$ تسـاوي $m$ وحسب التمهيدية (٣-١-١٢) فإن $(xN)^m=N$ ومنـه $(xN)^m=x^mN=N$. ممـا سبق نجد أن $x^m\in N$.

ب- بما أن $\gcd(n,m)=1$ عندئذ يوجد $u,v\in Z$ بحيث $1=un+vm$ ومنه

$$g=g^{un+vm}=(g^n)^u(g^m)^v\in K$$

ومنه $gK=K$ أي أن $g\in K$. ٥



٣- تعريـــف.

لتكن $G$ زمرة. نسمي أصغر عدد صحيح موجب $n$ يحقق $x^n=e$ وذلك أياً كان $x\in G$ معامل الزمرة $G$.

أثبت أن كل زمرة تبديلية منتهية تملك معامل يقسم مرتبة الزمرة $G$.

**الحـــل.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية ولنفرض أن $(G:1)=m$. لنأخذ المجموعة

$$S=\{s:s\in N^*;\quad x^s=e,\quad \forall x\in G\}$$

إن المجموعة $S$ غير خالية لأن $m\in S$. وبما أن كل مجموعة جزئية وغير خالية من $N^*$ تملك عنصراً أصغر، فإن $S$ تملك عنصر أصغر وليكن $n$. وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r\in Z$ بحيث $m=qn+r$ وان $0\le r<n$ لنفرض أن $r\neq 0$ عندئذ أيا كان $x\in G$ فإن $e=x^m=x^{qn+r}=x^{qn}x^r=(x^n)^qx^r=x^r$ ومنه $r\in S$ وهذا يناقض كون $n$ عنصراً أصغر في $S$. مما سبق نجد أن $r=0$ وبالتالي $n$ يقسم $m$. ٥

٤- لتكن $G$ زمرة منتهية غير تبديلية مرتبتها حيث $P$ عدد أولي. أثبت أنه إذا كان $Z(G)\neq\langle e\rangle$ فإن $(Z(G):1)=p$.

**الحـــل.**

بما أن $Z(G)$ زمرة جزئية من $G$ وحسب لاغرانج فإن مرتبة الزمرة $Z(G)$ تقسم $P^3$ وهذا يبين لنا أن $(Z(G):1)\in\{1,p,p^2,p^3\}$ ولكون $Z(G)\neq\langle e\rangle$ فإن $(Z(G):1)\neq 1$. من جهة أخرى بما أن الزمرة $G$ ليست تبديلية فإن $(Z(G):1)\neq p^3$. وبما أن الزمرة $Z(G)$ ناظمية في $G$ فإن

$$(G/Z(G):1)=\frac{(G:1)}{(Z(G):1)}=\frac{p^3}{p^2}=p.$$

أي أن الزمرة $G/Z(G)$ دوارة وحسب المبرهنة (٥-٢-٢) تكون الزمرة $G$ تبديلية وهذا مرفوض فرضاً. أي أن $(Z(G):1)\neq p^2$ مما سبق نجد أن $(Z(G):1)=p$. ٥

٥- لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها $pq$ حيث $p,q$ أعداد أولية ليست بالضرورة مختلفة. أثبت أن مرتبة الزمرة $Z(G)$ إما تساوي 1 أو تساوي $pq$.

**الحـــل.**

بمـــا أن $Z(G)$ زمـــرة جزئيـــة مـــن $G$ وحســـب مبرهنـــة لاغـــرانج، فـــإن $(Z(G):1)\in\{1,p,q,pq\}$ وهنا نميز حالتين: – الحالة الأولى. إذا كانت الزمـــرة $G$ تبديلية عندئذ فإن $G=Z(G)$ وبالتالي $(Z(G):1)=pq$. – الحالة الثانية. الزمرة $G$ ليســـت تبديليـــة، عندئـــذ $(Z(G):1)\neq pq$. لنفـــرض أن $(Z(G):1)=p$ عندئـــذ $(G/Z(G):1)=q$ وبالتالي الزمرة $G/Z(G)$ دوارة وحسب المبرهنـــة(٥-٢- ٢) تكون الزمرة $G$ تبديلية وهذا مرفوض فرضاً. كذلك الأمر عندما $(Z(G):1)=q$. مما سبق نجد أن $(Z(G):1)=1$. ◦

٦- لتكن $G$ زمرة و $H,K$ زمر جزئية منتهية في $G$. عندئذ فإن

$$(KH:1)=\frac{(K:1)(H:1)}{(K\cap H:1)}.$$

**الحـــل.**

لنفرض أن $(K:1)=m$ و $(H:1)=n$. إن المجموعة $KH$ تحوي بالتحديـد $nm$ عنصراً. وهنا نميز حالتين: – الحالة الأولى. إذا كان $K\cap H=\langle e\rangle$، في هذه الحالة، فـإن جميـع عناصـر المجموعـة $KH$ مختلفـة فيمـا بينهـا. لأنـه إذا وجـد $k_1h_1\in KH$, $kh$ بحيـث $kh=k_1h_1$ وأن $h,h_1\in H$, $k,k_1\in K$ فإن $hh_1^{-1}=k^{-1}k_1\in H\cap K=\langle e\rangle$ ومنه $h=h_1$, $k=k_1$، وهكذا فإن

$$(KH:1)=nm=(K:1)(H:1)=\frac{(K:1)(H:1)}{(K\cap H:1)}$$

– الحالة الثانية. $K\cap H\neq\langle e\rangle$. نلاحظ في هذه الحالة أن عناصر المجموعـة $KH$ ليست جميعهـا مختلفـة. لأنـه إذا كـان $h\in H$, $k\in K$ بحيـث $k\neq h$ وبما أن $K\cap H\neq\langle e\rangle$ يوجـد عنصـر $e\neq t\in K\cap H$. ومنـه $kh=(kt)(t^{-1}h)$ وأن $k\neq kt$, $h\neq t^{-1}h$. لنفرض أن $(K\cap H:1)=s$. وليكن $h\in H$, $k\in K$، عندئذ أيا كان $t\in K\cap H$ فإن $kh=(kt)(t^{-1}h)$، وهذا يبين لنا أن كل عنصـر مـن المجموعة $KH$ يمكن كتابته على الأقل في $s$ شكل فـي $KH$. مـن جهـة أخـرى،



ليـكن $k_1h_1\in KH$, $kh$ بحيـث $h\neq h_1$, $k\neq k_1$ وأن $kh=k_1h_1$ عندئـذ $k^{-1}k_1=hh_1^{-1}\in K\cap H$. بفـرض أن $t=k^{-1}k_1=hh_1^{-1}$ نجـد أن $k=k_1t^{-1}$, $h=th_1$. مما سبق نجد أن كل عنصر مـن المجموعـة $KH$ يمكـن كتابته بالتحديد في $s$ شكل في $KH$. وهذا يبين لنا أن

$$(KH:1)=\frac{nm}{s}=\frac{(K:1)(H:1)}{(K\cap H:1)}. ◦$$

٧- لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. نسمي تقـاطع جميـع الزمـر الجزئية الناظمية في $G$ والتي كل منها يحوي $H$ اللصاقة الناظمية للزمرة $H$ ونرمز لها $L(H)$. أثبت أن

١ - $L(H)$ هي أصغر زُمرة جزئية ناظمية في $G$ تحوي $H$.

٢ - $L(H)=\langle ghg^{-1};\quad g\in G,h\in H\rangle$.

**الحـل.**

١ - لتكن $\Im$ مجموعة كل الزمر الجزئية الناظمية في $G$ التي كل منها يحـوي $H$. وبما أن $H\in\Im$ فإن $\Im$ غير خالية وحسب المبرهنـة (٥-١-٢) نجـد أن $L(H)$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ تحوي $H$ حيث $L(H)=\bigcap_{K\in\Im}K$.

لتكن $M$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ تحوي $H$ عندئذ $M\in\Im$ ومنه

$$L(H)=\bigcap_{K\in\Im}K\subseteq M$$

وهذا يبين لنا أن $L(H)$ هي أصغر زمرة جزئية ناظمية في $G$ تحوي $H$.

٢ - ليكن $g\in G,h\in H$ و $K\in\Im$ وبما أن الزمرة $H$ ناظميـة فـي $G$ عندئـذ $ghg^{-1}\in H\subseteq K$ ومنه

$$\forall K\in\Im;\quad \{ghg^{-1};\quad g\in G,h\in H\}\subseteq K$$

$$\{ghg^{-1};\quad g\in G,h\in H\}\subseteq\bigcap_{K\in\Im}K=L(H)$$

وبالتالي $\langle ghg^{-1};\quad g\in G,h\in H\rangle\subseteq L(H)$.

من جهة أخرى، أيا كان $h \in H$ وبما أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$ فإن $H = gHg^{-1}$ وذلك أيا كان $g \in G$. ومنه لأجل كل $h \in H$ يوجد $h_0 \in H$ و $g \in G$ بحيث

$$h = gh_0g^{-1} \in \langle ghg^{-1}; \quad g \in G, h \in H \rangle$$

أي أن الزمرة $\langle ghg^{-1}; \quad g \in G, h \in H \rangle$ تحوي الزمرة $H$، وبما أنها ناظمية نجد أن $L(H) \subseteq \langle ghg^{-1}; \quad g \in G, h \in H \rangle$. مما سبق نجد أن

$$L(H) = \langle ghg^{-1}; \quad g \in G, h \in H \rangle . \circ$$

٨ – لتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $G$ و $\overline{G} = G/K$ ولتكن $S$ مجموعة جزئية من $G$ و $\overline{S} = \{xK: \quad x \in S\}$. والمطلوب:

١ – أثبت أنه إذا كانت المجموعة $S$ مولدة للزمرة $G$ فإن المجموعة $\overline{S}$ تكون مولدة للزمرة $\overline{G} = G/K$.

٢ – إذا كانت الزمرة $G$ منتهية التوليد ومولدة بـ $n$ عنصر فإن الزمرة $\overline{G}$ تكون منتهية التوليد ومولدة بـ $n$ عنصر.

**الحل.**

١ – ليكن $\overline{g} \in \overline{G}$ عندئذ $\overline{g} = gK$ حيث $g \in G$. وبما أن المجموعة $S$ مولدة للزمرة $G$ فإن $g = g_{i_1}^{\alpha_1}.g_{i_2}^{\alpha_2}.g_{i_3}^{\alpha_3}.\cdots.g_{i_t}^{\alpha_t}$ حيث $g_{i_j} \in S$ وذلك من أجل $1 \le j \le t$ وأن $\alpha_j \in Z$ حيث $1 \le j \le t$. ومنه

$$\overline{g} = gK = (g_{i_1}^{\alpha_1}.g_{i_2}^{\alpha_2}.g_{i_3}^{\alpha_3}.\cdots.g_{i_t}^{\alpha_t})K = (g_{i_1}K)^{\alpha_1}.(g_{i_2}K)^{\alpha_2}.(g_{i_3}K)^{\alpha_3}.\cdots.(g_{i_t}K)^{\alpha_t}$$

وبما أن العناصر $g_{i_j} \in S$ فإن $g_{i_j}K \in \overline{S}$ حيث $1 \le j \le t$. وهذا يبين لنا أن المجموعة $\overline{S}$ مولدة للزمرة $\overline{G} = G/K$.

٢ – ينتج من (١) في حالة المجموعة $S$ منتهية وأن $Card(S) = n$. ∘

٩– لتكن $H, K, M$ زمر جزئية ناظمية من الزمرة $G$ بحيث $M \subseteq H$. إذا كان $\frac{H}{M} \subseteq Z(\frac{G}{M})$ فإن $\frac{HK}{MK} \subseteq Z(\frac{G}{MK})$.



**الحل.**

ليكن $\overline{y} \in \frac{HK}{MK}$ ولنبرهن أنه أيا كان $\overline{x} \in \frac{G}{MK}$ فإن $\overline{x}.\overline{y} = \overline{y}.\overline{x}$. ليكن $\overline{x} \in \frac{G}{MK}$ عندئذ $\overline{x} = x(MK)$ حيث $x \in G$. من جهة أخرى، فإن $\overline{y} = (hk)(MK)$ حيث $h \in H, k \in K$ ومنه

$$\overline{x}.\overline{y} = x(MK)[(hk)(MK)] = (x(hk))(MK) = ([x(hk)]M)K$$ ومنه

$$(x(hk))M = (xM)[(hM)(kM)] = [(xM)(hM)](kM)$$

وبما أن $hM \in \frac{H}{M} \subseteq Z(\frac{G}{M})$ فإن

$$(x(hk))M = (hM)[(xM)(kM)] = (hM)[(kM)(xM)][(hM)(kM)](xM) = ((hk)M)(xM) = [(hk)x]M$$

وبالتالي فإن

$$\overline{x}.\overline{y} = ([x(hk)]M)K = [(hk)x]M)K = ((hk)x)MK = [(hk)(MK)]x(MK) = [(hk)(MK)]x(MK) = \overline{y}.\overline{x}$$

## تمـــــاريــن ( ٥ )

١ – لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية ناظمية في $G$.

– أثبت أنه إذا كانت الزمرة $G$ دوارة فإن الزمرة $G/H$ تكون أيضا دوارة.

– أثبت أنه إذا كانت الزمرة $G$ تبديلية فإن الزمرة $G/H$ تكون أيضا تبديلية.

٢ – أوجد مرتبة العنصر $5+\langle 6\rangle$ في الزمرة $Z_{18}/\langle 6\rangle$.

٣ – أوجد مرتبة العنصر $14+\langle 8\rangle$ في الزمرة $Z_{24}/\langle 8\rangle$.

٤ – أوجد جميع عناصر الزمرة $U(20)/U_5(20)$.

٥ – لتكن $G=Z/\langle 20\rangle$ و $H=\langle 4\rangle/\langle 20\rangle$. أوجد جميع عناصر $G,H$.

٦ – لتكن $G$ زمرة و $g\in G$. أثبت أن $\langle g\rangle.Z(G)$ زمرة جزئية تبديلية في $G$.

٧ – لتكن $G$ زمرة منتهية و $H$ زمرة جزئيـــة ناظميـــة فـــي $G$. أثبـــت أن مرتبـــة العنصر $gH$ في $G/H$ تقسم مرتبة العنصر $g$ في $G$ وذلك أيا كان $g\in G$.

٨ – لتكن $G$ زمرة و $H$زمرة جزئية ناظمية في $G$مرتبتها 2. أثبت أن $H\subseteq Z(G)$.

٩ – لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. إذا كانت كل مرافقة يسارية للزمـــرة $H$ في $G$ هي مرافقة يمينية، أثبت أن $H$ ناظمية في $G$.

١٠– لتكن $N$ زمرة جزئية من الزمرة $G$ بحيث $(G:N)=2$ أثبــت أنـــه إذا كـــان $x,y\in G$ بحيث $x\notin N, y\notin N$ فإن $xy\in N$.

١١ – لتكن $G$ زمرة و $n$ عدداً صحيحاً موجبـــاً. أثبـــت أنـــه إذا كانـــت المجموعـــة $H=\{x: x\in G; o(x)=n\}$ زمرة جزئية من $G$ فإنها تكون ناظمية في $G$.

١٢ – لـــتكن $G$ زمـــرة و $H,K$ زمـــر جزئيـــة مـــن $G$ و لنفـــرض أن $(H:1)=n,\quad (K:1)=m$. إذا كان $\gcd(n,m)=1$ أثبت أن $H\cap K=\langle e\rangle$.

١٣ – ليكن $n>2$ عدداً صحيحاً. أثبـــت أن المجموعـــة $U(n)^2=\{x^2; x\in U(n)\}$ زمرة جزئية في $U(n)$ وأن $U(n)^2 \not\subset U(n)$.

١٤ – أثبت أن $U(55)^3=\{x^3: \quad x\in U(55)\}=U(55)$.



# الفصـــــل الســــادس

## التشـــاكلات الزمـــريـــة ومبرهنـــات التمـــاثـــل

في هذه الفقرة سوف ندرج واحدة من أهم الأفكار الأساسية في الجبر، وهي مفهـــوم التشـــاكل أو مفهـــوم (*homomorphism*). إن مصـــطلح التشـــاكل أو *homomorphism* أتى من الكلمات الإغريقية (*homo*) وتعني يشبه أو مشابه وكلمة (*morphe*) وتعني شكلاً أو صيغة، وجبرياً، فإن مصـــطلح التشـــاكل يعنـــي البنـــى المتشابهة. و يعد *Camille Jordan* أول من أدخل هذا المفهوم وذلك عـــام ١٨٧٠. لنتعرف بداية على التشاكل بين زمرتين.

**تعريـــف.**

لتكن $G$ و $\overline{G}$ زمرتين ما. نسمي كل تطبيق (تابع) $f: G\to \overline{G}$ تشاكلاً زمريـــاً إذا حقق الشرط: أياً كان $x,y\in G$ فإن

$$f(xy)=f(x)f(y)$$

قبل أن نبدأ بدراسة خواص التشاكل الزمري، لنأخذ التعريف التالي:

**تعريـــف.**

ليكن $f: G\to \overline{G}$ تشاكل زمري. نسمي المجموعة:

$$Kerf=\{x: x\in G; \quad f(x)=\overline{e}\}$$

حيث $\overline{e}$ حيادي الزمرة $\overline{G}$، نواة التشاكل الزمري $f$.

من خلال المبرهنة التالية سوف ندرس خواص التشاكل الزمري والتي سوف تكون ضرورية لنا في دراستنا المقبلة.

مبرهنة ٦-١.

ليكن $f: G \to \overline{G}$ تشاكلاً زمرياً حيث $G, \overline{G}$ زمرتين اختياريتين. ولنفرض أن $e, \overline{e}$ حيادي كل من الزمرتين $G, \overline{G}$ على الترتيب. وليكن $g \in G$ و $H$ زمرة جزئية من $G$. عندئذ:

١- $f(e)=\overline{e}$.

٢- $f(g^{-1})=[f(g)]^{-1}$.

٣- $f(g^n)=[f(g)]^n$ وذلك أياً كان $n\in Z$.

٤- $Kerf$ زمرة جزئية ناظمية في $G$.

٥- المجموعة $f(H)=\{f(h); \quad h\in H\}$ زمرة جزئية في $\overline{G}$.

٦- إذا كانت الزمرة $H$ دوارة فإن $f(H)$ دوارة.

٧- إذا كانت الزمرة $H$ تبديلية فإن $f(H)$ تبديلية.

٨- إذا كانت الزمرة $H$ ناظمية في $G$ فإن $f(H)$ ناظمية في $f(G)$.

٩- إذا كان $o(g)=n$ فإن $o(f(g))$ تقسم $n$.

١٠- إذا كانت $(H:1)=n$ فإن $(f(H):1)$ تقسم $n$.

١١- إذا كان $f(g)=g'$ فإن $f^{-1}(g')=\{x:x\in G, f(x)=g'\}=g.Kerf$.

١٢- إذا كانت $\overline{K}$ زمرة جزئية في $\overline{G}$ فإن $f^{-1}(\overline{K})=\{k:k\in G, f(k)\in\overline{K}\}$ زمرة جزئية في $G$.

١٣- إذا كانت $\overline{K}$ ناظمية في $\overline{G}$ فإن $f^{-1}(\overline{K})$ ناظمية في $G$.

١٤- $Kerf=\langle e\rangle$ عندما و فقط عندما التطبيق $f$ متباين.

البرهان.

١- لدينا $ee=e$ ومنه $f(e)f(e)=f(e)=f(e)\overline{e}$ وحسب قانون الاختصار في الزمرة نجد أن $f(e)=\overline{e}$.

٢ - لدينا $gg^{-1}=e$ ومنه $f(g)f(g^{-1})=f(e)=\overline{e}$ وهذا يبين لنا أن $f(g^{-1})=[f(g)]^{-1}$.



٣ - ينتج مباشرة من التعريف.

٤ - بما أن $f(e)=\overline{e}$ نجد أن المجموعة $Kerf$ غير خالية. ليكن $x,y\in Kerf$ عندئذ $f(x)=f(y)=\overline{e}$ ومنه

$$f(xy^{-1})=f(x)f(y^{-1})=f(x)[f(y)]^{-1}=\overline{e}\,\overline{e}=\overline{e}$$

وهذا يبين لنا أن $xy^{-1}\in Kerf$ وبالتالي $Kerf$ زمرة جزئية في $G$. ليكن $a\in G, \quad z\in Kerf$ عندئذ $aza^{-1}\in G$ كما أن

$$f(aza^{-1})=f(a)f(z)f(a^{-1})=f(a)[f(a)]^{-1}=\overline{e}$$

أي أن $aza^{-1}\in Kerf$. وهذا يبين لنا أن $a.Kerf.a^{-1}\subseteq Kerf$ وذلك أيا كان $a\in G$.

أي أن الزمرة الجزئية $Kerf$ ناظمية في $G$.

٥ - بما أن $e\in H$ فإن $\overline{e}=f(e)\in f(H)$ ومنه فإن $f(H)$ مجموعة جزئية من $\overline{G}$ وغير خالية. ليكن $y_1,y_2\in f(H)$ عندئذ يوجد $x_1,x_2\in H$ بحيث $y_1=f(x_1), \quad y_2=f(x_2)$ ومنه

$$y_1y_2^{-1}=f(x_1)[f(x_2)]^{-1}=f(x_1x_2^{-1})\in f(H)$$

أي أن $f(H)$ زمرة جزئية في $\overline{G}$.

٦ - لنفرض أن $H=\langle a\rangle$ حيث $a\in H$ ولنبرهن أن $f(H)=\langle f(a)\rangle$. بما أن $a\in H$ فإن $f(a)\in f(H)$ وبالتالي $\langle f(a)\rangle\subseteq f(H)$. ليكن $y\in f(H)$ عندئذ $y=f(x)$ حيث $x\in H$ ومنه $x=a^n$ حيث $n\in Z$. وهكذا فإن

$$y=f(x)=f(a^n)=[f(a)]^n\in\langle f(a)\rangle$$

أي أن $f(H)\subseteq\langle f(a)\rangle$. مما سبق نجد أن $f(H)=\langle f(a)\rangle$ وبالتالي الزمرة $f(H)$ دوارة.

٧ - نتركه للقارئ.

٨ - لنفرض أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$. عندئذ $yHy^{-1}\subseteq H$ وذلك أيا كان $y\in G$. ليكن $a\in f(H)$ و $x\in f(G)$ عندئذ $x=f(y), \quad a=f(h),$ حيث $h\in H, \quad y\in G,$ ومنه فإن $yhy^{-1}\in H$ وبالتالي

$$f(yhy^{-1}) = f(y)f(h)[f(y)]^{-1} = xax^{-1} \in f(H)$$

وهكذا فإنه أيا كان $x \in f(G)$ ينتج أن $xf(H)x^{-1} \subseteq f(H)$ وبالتالي الزمرة الجزئية $f(H)$ ناظمية في $f(G)$.

٩ – لنفرض أن $o(g)=n$ و أن $o(f(g))=m$ عندئذ حسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r \in Z$ بحيث $n=qm+r$ وأن $0 \le r < m$. لنفرض أن $r \ne 0$ عندئذ $e=g^n=g^{mq}g^r$ وبالتالي

$$\bar{e} = f(e) = f(g^{mq})f(g^r) = [(f(g))^m]^q (f(g))^r = (f(g))^r$$

وهذا يناقض كون $o(f(g))=m$. أي أن $r=0$ وبالتالي $n=qm$.

١٠– يبرهن بطريقة مشابهة للخاصة (٩).

١١– نعلم أن $f^{-1}(g')=\{x : x\in G, \quad f(x)=g'\}$. ليكن $x \in f^{-1}(g')$ عندئذ فإن $f(x)=g'=f(g)$ ومنه $f(g^{-1}x)=\bar{e}$ وهذا يبين لنا أن $g^{-1}x \in Kerf$ وبالتالي $x \in g.Kerf$ أي أن $f^{-1}(g') \subseteq g.Kerf$. ليكن $z \in g.Kerf$ عندئذ $z = gx \in G$ حيث $x \in .Kerf$ ومنه $f(z)=f(g)f(x)=g'$ وهذا يبين لنا أن $z\in f^{-1}(g')$ وبالتالي $g.Kerf \subseteq f^{-1}(g')$. مما سبق نجد أن $f^{-1}(g') = g.Kerf$.

١٢– واضح أن $\Phi \ne f^{-1}(\bar{K}) \subseteq G$ لأن $f(e)=\bar{e}\in \bar{K}$. ليكن $x,y\in f^{-1}(\bar{K})$ عندئذ $x,y\in G$ وأن $f(x),f(y)\in\bar{K}$ ومنه

$$f(x)[f(y)]^{-1} = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1}) \in \bar{K}$$

أي أن $x.y^{-1}\in f^{-1}(\bar{K})$ وبالتالي $f^{-1}(\bar{K})$ زمرة جزئية من $G$.

١٣–حسب (١٢) إن $f^{-1}(\bar{K})$ زمرة جزئية من $G$. ليكن $g\in G$ ولنبرهن أن $gf^{-1}(\bar{K})g^{-1} \subseteq f^{-1}(\bar{K})$.

ليكن $z\in f^{-1}(\bar{K})$ عندئذ $gzg^{-1}\in G$ وأن

$$f(gzg^{-1}) = f(g)f(z)f(g^{-1}) \in f(g)\bar{K}[f(g)]^{-1} \subseteq \bar{K}$$

وهكذا نجد أن $gf^{-1}(\bar{K})g^{-1}\subseteq f^{-1}(\bar{K})$ وبالتالي الزمرة $f^{-1}(\bar{K})$ ناظمية في $G$.

١٤ – لنفرض أن $Kerf=\langle e\rangle$. ليكن $a,b\in G$ بحيث $f(a)=f(b)$ ومنه



$$f(a)[f(b)]^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) = \bar{e}$$

وبالتالي $ab^{-1}\in Kerf$ أي أن $ab^{-1}=e$ ومنه $a=b$ و التشاكل $f$ متباين. لنفرض أن $f$ متباين، وليكن $z\in Kerf$ عندئذ $f(z)=\bar{e}=f(e)$ ومنه يكون $z=e$ وبالتالي $Kerf=\langle e\rangle$.

الخاصة (٤) من المبرهنة السابقة تقول أن نواة أي تشاكل زمري هي زمرة جزئية ناظمية. المبرهنة التالية تبين لنا أن عكس هذه الخاصة صحيح أيضا.

**مبرهنة ٦–٢.**

لتكن $G$ زمرة. كل زمرة جزئية ناظمية في $G$ هي نواة لتشاكل زمري غامر.

**البرهان.**

لتكن $H$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. ولنأخذ العلاقة $\pi: G\to G/H$ المعرفة بالشكل $\forall g\in G$ فإن $\pi(g)=gH$. واضح أن العلاقة $\pi$ تشاكل لأنه $\forall g_1,g_2\in G$ فإن

$$\pi(g_1g_2)=(g_1g_2)H=(g_1H)(g_2H)=\pi(g_1)\pi(g_2)$$

كذلك $\pi$ غامر، لأنه $\forall xH\in G/H$ فإن $x\in G$ وبالتالي $\pi(x)=xH$.

لنبرهن على أن $Ker\pi = H$. ليكن $h\in H$ عندئذ $\pi(h)=hH=H$ ومنه $h\in Ker\pi$ أي أن $H\subseteq Ker\pi$. ليكن $k\in Ker\pi$ عندئذ $\pi(k)=kH=H$ ومنه $k\in H$ وبالتالي $Ker\pi\subseteq H$. مما سبق نجد أن $Ker\pi = H$.

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية ناظمية. نسمي التشاكل الزمري الغامر $\pi: G\to G/H$ المعرف بالشكل $\forall g\in G, \quad \pi(g)=gH$ التشاكل الطبيعي (القانوني الغامر).

**تعريف.**

لتكن $G,\bar{G}$ زمرتين اختياريتين و $f:G\to\bar{G}$ تشاكلاً زمرياً. نقول عن $f$ إنه تماثل إذا كان $f$ متبايناً وغامراً. ونقول عن الزمرتين $G,\bar{G}$ إنهما متماثلتان إذا وجد بينهما تماثل، ونعبر عن ذلك $G\approx\bar{G}$.

ماذا يعني وجود تماثل بين زمرتين؟.

لنفرض أنه لدينا طالبان أحدهما عربي والآخر إنكليزي. إذا طلب منهما عد مجموعة من الكتب، فإن الطالب العربي يقول واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة،....والطالب الإنكليزي يقول $one, two, three, four, \cdots$. هل الطالبان يقومان بأشياء مختلفة في هذه الحالة؟ بالطبع لا، فكلا الطالبين يقومان بعد مجموعة الكتب ولكن يستخدمان لأجل ذلك مصطلحات مختلفة. أيضا الطالب العربي يقول اثنان زائد ثلاثة يساوي خمسة بينما الطالب الإنكليزي يقول $tow + three = five$. في هذه الحالة أيضا كلا الطالبان يعبران عن عملية الجمع ولكن بمصطلحات مختلفة. وهذه حال الزمر المتماثلة. فإذا كانت لدينا زمرتان متماثلتان فهذا يعني أن هاتين الزمرتين متشابهتان ولكن الفرق بينهما يكون غالبا في المصطلحات أو طبيعة العناصر. بمعنى آخر الزمر المتماثلة تملك الخواص الجبرية ذاتها.

العلاقة الهامة بين التشاكلات الزمرية وزمر الخارج نوردها من خلال المبرهنة التالية والتي غالباً ما تسمى النظرية الأساسية للتشاكلات الزمرية.

**مبرهنة ٦-٣.( مبرهنة التماثل الأولى *Jordan* ١٨٧٠ ).**

ليكن $f : G \to \overline{G}$ تشاكلاً زمرياً. عندئذ:

١- $G/Kerf \approx \operatorname{Im} f$.

٢- إذا كان $f$ غامراً فإن $G/Kerf \approx \overline{G}$.

**البرهان.**

١ – لنعرف العلاقة $\varphi : G/Kerf \to \operatorname{Im} f$ بالشكل التالي:

$$\forall g.Kerf \in G/Kerf; \quad \varphi(g.Kerf) = f(g)$$

لنبرهن في البداية أن العلاقة $\varphi$ معرفة جيداً. ليكن $\forall x.Kerf, y.Kerf \in G/Kerf$ بحيث $x.Kerf = y.Kerf$ عندئذ $(x^{-1}.y).Kerf = Kerf$ وبالتالي $(x^{-1}.y) \in Kerf$ ومنه $f(x^{-1}.y) = \bar{e}$. أي أن $f(x) = f(y)$. وهذا يبين لنا أن العلاقة $\varphi$ تطبيق، كذلك $\varphi$ تشاكل لأن



$$\varphi[(x.Kerf)(y.Kerf)] = \varphi(xy.Kerf) = f(xy) =$$
$$= f(x)f(y) = \varphi(x.Kerf)\varphi(y.Kerf)$$

أيضا $\varphi$ متباين، لأنه إذا كان $f(x) = f(y)$ فإن $f(x^{-1}y) = \bar{e}$ وبالتالي $x^{-1}y \in Kerf$ ومنه $x.Kerf = y.Kerf$. وهو غامر، لأنه إذا كان $z \in \operatorname{Im} f$ فإن $z = f(x)$ حيث $x \in G$ وبالتالي $x.Kerf \in G/Kerf$ وأن $\varphi(x.Kerf) = f(x) = z$. مما سبق نجد أن $G/Kerf \approx \overline{G}$.

٢ – ينتج مباشرة من (١) لأنه في هذه الحالة يكون $\operatorname{Im} f = \overline{G}$. ◦

مبرهنة أخرى تتعلق بالتماثلات الزمرية نوردها لأن:

**مبرهنة ٦-٤.( مبرهنة التماثل الثانية).**

لتكن $G$ زمرة و $H, K$ زمرتين جزئيتين من $G$. إذا كانت الزمرة الجزئية $K$ ناظمية في $G$، عندئذ

$$HK/K = KH/K = \langle H \cup K \rangle / K \approx H/H \cap K.$$

**البرهان.**

وجدنا سابقا (المبرهنة ٥-١-٤) أن $KH = HK = \langle H \cup K \rangle$ ومنه

$$HK/K = KH/K = \langle H \cup K \rangle / K$$

لنبرهن أن $HK/K \approx H/H \cap K$.

لنعرف العلاقة $f : H \to HK/K$ بالشكل التالي: $\forall h \in H$ فإن $f(h) = hK$.

واضح أن العلاقة $f$ هي تطبيق. كما أن $f$ تشاكل لأنه

$\forall h_1, h_2 \in H$ فإن $f(h_1h_2) = (h_1h_2)K = (h_1K)(h_2K) = f(h_1)f(h_2)$

كذلك $f$ غامر لأنه إذا كان $\bar{y} \in HK/K$ فإن $\bar{y} = yK$ حيث $y \in HK$ وبالتالي $y = hk$ حيث $k \in K, \quad h \in H$ وهكذا نجد أن

$$\bar{y} = yK = (hk)K = (hK)(kK) = (hK)K = hK$$

و بما أن $h \in H$ نجد أن $f(h) = hK = \bar{y}$ وحسب مبرهنة التماثل الأولى فإن $H/Kerf \approx HK/K$. لنبرهن الآن على أن $Kerf = H \cap K$. ليكن $a \in Kerf$

عندئذ $a \in H$ وأن $f(a) = aK = K$ وهكذا فإن $a \in K$ وبالتالي $a \in H \cap K$ أي أن $Kerf \subseteq H \cap K$. كذلك إذا كان $b \in H \cap K$ فإن $f(b) = bK = K$ وبالتالي $b \in Kerf$ ومنه $H \cap K \subseteq Kerf$ وهذا يبين لنا أن $Kerf = H \cap K$. مما سبق نجد أن $HK/K \approx H/H \cap K$ ○.

مبرهنة أخرى تتعلق بالتماثلات الزمرية نوردها فيما يلي:

**مبرهنة ٦-٥.(مبرهنة التماثل الثالثة).**

لتكن $G$ زمرة و $H, K$ زمرتين جزئيتين ناظميتين في $G$ بحيث $K \subseteq H$. عندئذ:

١- الزمرة $K$ ناظمية في $H$.

٢- الزمرة $H/K$ ناظمية في $G/K$.

٣- $(G/K)/(H/K) \approx G/H$.

**البرهان.**

١- ينتج من المبرهنة (٥-١-٢).

٢ - سوف نبرهن أن الزمرة $H/K$ هي نواة لتشاكل زمري منطلقه الزمرة $G/K$.

لنعرف العلاقة $\varphi: G/K \to G/H$ بالشكل التالي:

$$\forall gK \in G/K; \quad \varphi(gK) = gH$$

إن العلاقة $\varphi$ تطبيق، لأنه أياً كان $g_1K, g_2K \in G/K$ بحيث $g_1K = g_2K$ عندئذ $g_1 \in g_1K = g_2K \subseteq g_2H$ ومنه

$g_1H = g_2H$ أي أن $\varphi(g_1K) = \varphi(g_2K)$

كما أن $\varphi$ تشاكل لأن

$$\varphi(g_1K.g_2K) = \varphi[(g_1g_2)K] = (g_1g_2)H = (g_1H)(g_2H) = \varphi(g_1K)\varphi(g_2K)$$

لنبرهن أن $Ker\varphi = H/K$. ليكن $xK \in Ker\varphi$ عندئذ $\varphi(xK) = xH = H$ ومنه $x \in K$ وهكذا فإن $xK \in H/K$ أي أن $Ker\varphi \subseteq H/K$. ليكن $yK \in H/K$ عندئذ $y \in H$ ومنه $\varphi(yK) = yH = H$ أي أن $yK \in Ker\varphi$. وبالتالي $H/K \subseteq Ker\varphi$. مما سبق نجد أن $Ker\varphi = H/K$. وبما أن الزمرة $Ker\varphi$ ناظمية في $G/K$ نجد أن الزمرة $H/K$ ناظمية في $G/K$.



٣ - لإثبات أن $(G/K)/(H/K) \approx G/H$ يكفي أن نبرهن أن التشاكل $\varphi$ المعرف في (٢) غامر. ليكن $\bar{z} \in G/H$ عندئذ $\bar{z} = zH$ وحيث $z \in G$ ومنه $zK \in G/K$ وأن $\varphi(zK) = zH = \bar{z}$ وهذا يبين لنا أن التشاكل $\varphi$ غامر، وحسب مبرهنة التماثل الأولى نجد أن $(G/K)/Ker\varphi = (G/K)/(H/K) \approx G/H$ ○.

واحدة من أهم تطبيقات مبرهنة التماثل الأولى هي الحقيقة التالية:

**مبرهنة ٦-٦.**

ليكن $n > 1$ عدد صحيح. عندئذ: $Z/\langle n\rangle \approx Z_n$.

**البرهان.**

لنعرف العلاقة $\varphi: Z \to Z_n$ بالشكل التالي:

$$\forall m \in Z; \quad \varphi(m) = m(\text{mod-}n)$$

واضح أن العلاقة $\varphi$ تطبيق وأن هذا التطبيق هو تشاكل لأنه $\forall m_1, m_2 \in Z$ فإن

$$\varphi(m_1+m_2) = (m_1+m_2)\text{mod-}n = m_1\text{ mod-}n + m_2\text{ mod-}n = \varphi(m_1)+\varphi(m_2)$$

وذلك بالاعتماد على المبرهنة (١-٦-٤). كما أن التشاكل $\varphi$ غامر، لأنه إذا كان $s \in Z_n$ فإن $s \in Z$ وأن $s < n$ ومنه $\varphi(s) = s\text{mod-}n = s$. وهكذا حسب مبرهنة التماثل الأولى نجد أن $Z/Ker\varphi \approx Z_n$. لنبرهن على أن $Ker\varphi = \langle n\rangle$. ليكن $x \in Ker\varphi$ عندئذ $\varphi(x) = x\text{mod-}n = 0$ ومنه $x = mn$ حيث $m \in Z$. أي أن $x \in nZ = \langle n\rangle$ وبالتالي $Ker\varphi \subseteq \langle n\rangle$. من جهة أخرى، ليكن $y \in \langle n\rangle$ عندئذ $y = nt$ حيث $t \in Z$ وبالتالي $\varphi(y) = y\text{mod-}n = 0$ أي أن $y \in Ker\varphi$. وهكذا نجد أن $\langle n\rangle \subseteq Ker\varphi$. مما سبق نجد أن $Ker\varphi = \langle n\rangle$. وبالتالي $Z/\langle n\rangle \approx Z_n$ ○.

مبرهنة هامة أخرى تتعلق بالزمر المتماثلة وبشكل خاص بالزمر الدوارة التي تسمى مبرهنة التصنيف للزمر الدوارة. وهذه المبرهنة من جهة تصنف لنا الزمر الدوارة غير المنتهية ومن جهة أخرى تصنف الزمر الدوارة المنتهية من حيث المرتبة.

**مبرهنة ٦-٧.**

القضايا التالية صحيحة:

١- أية زمرة دوارة وغير منتهية تماثل الزمرة $Z$.

٢- جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية متماثلة.

٣- كل زمرة دوارة منتهية ومرتبتها $n$ تماثل الزمرة $Z_n$.

٤- جميع الزمر الدوارة المنتهية التي لها المرتبة ذاتها متماثلة.

**البرهان.**

١ - لتكن $G=\langle a\rangle$ زمرة دوارة وغير منتهية. ولنأخذ التطبيق $f:Z\to G$ المعرف بالشكل

$$\forall n\in Z;\quad f(n)=a^n.$$

واضح أن التطبيق $f$ هو تشاكل متباين وغامر، أي أن $G\approx Z$.

٢ - ينتج من(١) وبشكل مباشر.

٣- لتكن $G=\langle a\rangle$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها $n$. ولنعرف العلاقة $\varphi:Z_n\to G$ بالشكل التالي $\varphi(m)=a^m;\ \forall m\in Z_n$، فنجد أن العلاقة $\varphi$ هي تطبيق وهذا التطبيق متباين لأنه $\forall m_1,m_2\in Z_n$ فإن $0\le m_1,m_2<n$ ومنه

$$m_1=m_2 \Leftrightarrow a^{m_1}=a^{m_2}\Leftrightarrow \varphi(m_1)=\varphi(m_2)$$

كما أن $\varphi$ غامر، لأنه إذا كان $y\in G$ فإن $y=a^s$ حيث $0\le s<n$، أي أن $s\in Z_n$ وبالتالي $\varphi(s)=a^s=y$. بقي أن نبرهن أن $\varphi$ تشاكل، وهو كذلك لأنه $\forall m_1,m_2\in Z_n$ فإن

$$m_1+m_2=\begin{cases} m_1+m_2 & m_1+m_2<n\\ m_1+m_2-n & m_1+m_2\ge n\end{cases}$$

وبالتالي

$$\varphi(m_1+m_2)=\begin{cases} a^{m_1+m_2}=a^{m_1}a^{m_2} & m_1+m_2<n\\ a^{m_1+m_2-n}=a^{m_1}a^{m_2}a^{-n}=a^{m_1}a^{m_2} & m_1+m_2\ge n\end{cases}=$$
$$=\varphi(m_1)\varphi(m_2)$$



وهكذا نجد أن $\varphi$ تماثل، أي أن $G\approx Z_n$.

٤ - ينتج وبشكل مباشر من (٢). ∘

لنورد الآن واحدة من خواص التماثلات الزمرية المتعلقة بمرتبة العنصر والتي ضرورية لنا في المستقبل.

**تمهيدية ٦-٨.**

ليكن $f:G\to\overline{G}$ تماثلاً زمرياً وليكن $a\in G$. عندئذ $o(a)=o(f(a))$.

**البرهان.**

لنفرض أن $o(a)=n$ وأن $o(f(a))=m$. عندئذ $[f(a)]^m=[f(a)]^n=\bar{e}$ ومنه فإن $m$ يقسم $n$ أي يوجد $t\in Z$ بحيث $n=mt$. من جهة أخرى، نجد أن $a^m=a^n=e$ وبالتالي العدد $n$ يقسم $m$ ومنه يوجد $s\in Z$ بحيث $m=ns$ وهكذا فإن $n=mt=nst$ وهذا يبين لنا أن $st=1$ وبالتالي $s=t=1$ أي أن $n=m$. ∘

لنورد الآن بعض الأمثلة على الزمر المتماثلة وغير المتماثلة.

**مثال.**

الزمر التالية متماثلة $U(10)$, $Z_4$, $U(5)$ أي

$$U(5)\approx Z_4\approx U(10)$$

**الحل.**

نعلم أن $Z_4$ زمرة دوارة مرتبتها 4. لقد وجدنا سابقا أن $U(10)$ هي زمرة مولدة بالعنصر 3 ومرتبتها 4 ومنه $Z_4\approx U(10)$.

لندرس الزمرة $U(5)=\{1,2,3,4\}$. نلاحظ أن

$$3^0=1,\quad 3^1=3,\quad 3^2=4,\quad 3^3=2$$

مما سبق نجد أن $U(5)=\langle 3\rangle$، أي أن الزمرة $U(5)$ دوارة مرتبتها 4 ومنه $U(5)\approx Z_4$ وهكذا فإن $U(5)\approx Z_4\approx U(10)$.

**مثال.**

الزمرتان $U(10)$, $U(12)$ غير متماثلتين.

**الحـل.**

لندرس الزمرة $U(12)=\{1,5,7,11\}$. نلاحظ أن $1^2=1,5^2=1,7^2=1,11^2=1$. أي أن $\forall x\in U(12);\quad x^2=1$.

لنفرض جدلاً أن $U(10)\approx U(12)$ ولنرمز لهذا التماثل $\varphi:U(10)\to U(12)$ فنجد أن

$$\varphi(9)=\varphi(3.3)=\varphi(3)\varphi(3)=[\varphi(3)]^2=1$$

كما أن

$$\varphi(1)=\varphi(1.1)=\varphi(1)\varphi(1)=[\varphi(1)]^2=1$$

ومنه $\varphi(9)=\varphi(1)$ بينما $9\neq 1$ وهذا يناقض كون $\varphi$. إذن الزمرتان $U(10),\quad U(12)$ غير متماثلتين.

**تطبيق ٦-٩.**

ما هو عدد التشاكلات الزمرية من الزمرة $Z_{12}$ إلى الزمرة $Z_{30}$.

**الحـل.**

ليكن $\varphi:Z_{12}\to Z_{30}$ تشاكلاً زمرياً. بما أن الزمرة $Z_{12}$ دوارة مولدة بالعدد ١ أي $Z_{12}=\langle 1\rangle$ عندئذ أيا كان $k\in Z_{12}$ فإن $\varphi(k)=k\varphi(1)$ وذلك حسب الخاصة (٣) من المبرهنة (٦-١). وهذا يبين لنا أن التشاكل $\varphi$ يتعين بشكل تام بمعرفة $\varphi(1)$. لنفرض أن $\varphi(1)=a$ عندئذ $\varphi(k)=ka$ وذلك أيا كان $k\in Z_{12}$. بما أن $o(1)=12$ وحسب الخاصة (٩) من المبرهنة (٦-١) فإن $o(a)$ تقسم 12. كذلك $o(a)$ تقسم 30. أي أن $o(a)$ تقسم 12,30 في آن واحد. وبما أن المجموعة $\{1,2,3,6\}$ هي القواسم المشتركة لكل من 12,30 فإن $o(a)\in\{1,2,3,6\}$ وبملاحظة أن عناصر الزمرة $Z_{30}$ التي مراتبها 1,2,3,6 هي $\{0,5,10,15,20,25\}$ نستنتج أن $a\in\{0,5,10,15,20,25\}$ ومنه قيمة $\varphi(1)$ لها ستة احتمالات، وهي

$$\varphi(1)=0,\varphi(1)=5,\varphi(1)=10,\varphi(1)=15,\varphi(1)=20,\varphi(1)=25$$

وهذا يبين لنا أنه توجد ستة تشاكلات زمرية من الزمرة $Z_{12}$ إلى الزمرة $Z_{30}$.



توجد علاقة هامة بين الزمر الجزئية وتقاطعاتها سوف نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٦-١٠.**

لتكن $G$ زمرة و $A,B,C,D$ زمر جزئية ناظمية من $G$ تحقق أن $A$ ناظمية في $B$ و $C$ ناظمية في $D$. عندئذ:

١ - الزمرة $A(B\cap C)$ ناظمية في $A(B\cap D)$.

٢ - الزمرة $C(D\cap A)$ ناظمية في $C(D\cap B)$.

٣ - $\dfrac{A(B\cap D)}{A(B\cap C)}\approx\dfrac{C(D\cap B)}{C(D\cap A)}$.

**البرهـان.**

١ - بما أن الزمرة $A$ ناظمية في $B$ وأن $A,(B\cap C)\subseteq B$ فإن $A(B\cap C)$ زمرة جزئية في $B$. لنأخذ العلاقة $f:B\cap D\to D$ المعرفة بالشكل $f(x)=x$ أيا كان $x\in B\cap D$ من الواضح أن $f$ تشاكل متباين. من جهة أخرى، بما أن الزمرة $C$ ناظمية في $D$ لنأخذ التشاكل القانوني الغامر $\varphi:D\to D/C$ المعرف بالشكل $\varphi(d)=dC$ وذلك أيا كان $d\in D$ عندئذ

$$\psi=\varphi\circ f:B\cap D\to D/C$$

هو تشاكل زمري وأن $Ker\psi=B\cap C$ لأنه إذا كان $a\in Ker\psi$ فإن $a\in B\cap D$ وأن $\psi(a)=C$ ومنه

$$C=\psi(a)=\varphi\circ f(a)=\varphi(f(a))=\varphi(a)=aC$$

أي أن $a\in C$ ومنه $a\in(B\cap D)\cap C=B\cap C$ لأن $C\subseteq D$ وبالتالي $Ker\psi\subseteq B\cap C$. ليكن $b\in B\cap C$ وبما أن $C\subseteq D$ فإن $b\in B\cap D$ ومنه $f(b)=b$ كما أن

$$\psi(b)=\varphi\circ f(b)=\varphi(f(b))=\varphi(b)=bc=c$$

أي أن $b\in Ker\psi$ ومنه $B\cap C\subseteq Ker\psi$. مما سبق نجد أن $Ker\psi=B\cap C$.

وبما أن الزمرة $Ker\psi$ ناظمية في $B\cap D$ فإن الزمرة $B\cap C$ ناظمية في $B\cap D$.

$$AC \cap CA \cap D = AC \cap D = C(A \cap D)$$

مما سبق نجد أن

$$B \cap D \cap A(B \cap C) = B \cap D \cap B \cap CA \cap AC = B \cap D \cap CA \cap AC =$$
$$= A(B \cap C) \cap C(A \cap D)$$

بالتعويض في العلاقة (*) نجد أن

$$\frac{A(B \cap D)}{A(B \cap C)} \approx \frac{B \cap D}{B \cap D \cap A(B \cap C)} = \frac{B \cap D}{A(B \cap C) \cap C(A \cap D)}$$

بطريقة مشابهة نجد أن

$$\frac{C(B \cap D)}{C(A \cap D)} \approx \frac{B \cap D}{A(B \cap C) \cap C(A \cap D)}$$

وهذا يبين لنا أن $\frac{A(B \cap D)}{A(B \cap C)} \approx \frac{C(D \cap B)}{C(D \cap A)}$ .

**مبرهنة ٦-١١.**

ليكن $\varphi : G \to \overline{G}$ تشاكلاً زمرياً غامراً. لنفرض أن $\Im$ هي مجموعة كل الزمر الجزئية في $G$ والتي كل منها يحوي $Ker\varphi$ و أن $\overline{\Im}$ هي مجموعة كل الزمر الجزئية في $\overline{G}$. عندئذ

١ – يوجد تطبيق متباين وغامر بين $\Im, \overline{\Im}$ .

٢ – لتكن $H \in \Im$ الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة $H$ ناظمية في $G$ هو أن تكون الزمرة $\overline{\varphi}(H)$ ناظمية في $\overline{G}$ .

٣ – من أجل أية زمرة جزئية ناظمية $H \in \Im$ فإن $\frac{G}{H} \approx \frac{\overline{G}}{\varphi(H)}$.

**البرهان.**

١ – لنعرف العلاقة $\overline{\varphi} : \Im \to \overline{\Im}$ بالشكل التالي

$$\forall H \in \Im; \quad \overline{\varphi}(H) = \varphi(H) = \overline{H}$$

واضح أن $\overline{H}$ زمرة جزئية في $\overline{G}$ أي أن $\overline{H} \in \overline{\Im}$ وذلك لأن $\varphi$ تشاكل حسب المبرهنة (٦-١). كما أن العلاقة $\overline{\varphi}$ معرفة جيداً، لأنه إذا كانت $H_1, H_2 \in \Im$

بحيث $H_1 = H_2$ فإن $\varphi(H_1) = \varphi(H_2)$ ومنه $\overline{\varphi}(H_1) = \overline{\varphi}(H_2)$. لإثبات أن التطبيق $\overline{\varphi}$ تقابل يكفي أن نبرهن على وجود تطبيق $\overline{\psi} : \overline{\Im} \to \Im$ يحقق $\overline{\varphi}\,\overline{\psi} = I_{\overline{\Im}}, \overline{\psi}\,\overline{\varphi} = I_{\Im}$.

لنعرف علاقة $\overline{\psi} : \overline{\Im} \to \Im$ بالشكل التالي

$$\forall \overline{K} \in \overline{\Im}; \quad \overline{\psi}(\overline{K}) = \varphi^{-1}(\overline{K})$$

إن $\varphi^{-1}(\overline{K})$ زمرة جزئية في $G$ تحوي $Ker\varphi$ ومنه $\varphi^{-1}(\overline{K}) \in \Im$ لأنه أيا كان $g \in Ker\varphi$ فإن $\varphi(g) = \overline{e} \in \overline{K}$ ومنه $g \in \varphi^{-1}(\overline{K})$ وهذا يبين لنا أن $Ker\varphi \subseteq \varphi^{-1}(\overline{K})$ أي أن $\varphi^{-1}(\overline{K}) \in \Im$. كما أن العلاقة $\overline{\psi}$ معرفة جيداً، لأنه إذا كانت $\overline{K}_1, \overline{K}_2 \in \overline{\Im}$ بحيث $\overline{K}_1 = \overline{K}_2$ عندئذ أيا كان $x \in \varphi^{-1}(\overline{K}_1)$ فإن $\varphi(x) \in \overline{K}_1 = \overline{K}_2$ ومنه $x \in \varphi^{-1}(\overline{K}_2)$. مما سبق نجد أن $\varphi^{-1}(\overline{K}_1) \subseteq \varphi^{-1}(\overline{K}_2)$. بشكل مشبه نجد أن $\varphi^{-1}(\overline{K}_2) \subseteq \varphi^{-1}(\overline{K}_1)$ ومنه

$$\overline{\psi}(\overline{K}_1) = \varphi^{-1}(\overline{K}_1) = \varphi^{-1}(\overline{K}_2) = \overline{\psi}(\overline{K}_2)$$

لنبرهن على أن $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi} = I_{\Im}$. ليكن $H \in \Im$ عندئذ

$$\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}(H) = \overline{\psi}(\overline{\varphi}(H)) = \overline{\psi}(\varphi(H)) = \varphi^{-1}(\varphi(H))$$

لنبرهن على أن $\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H$. ليكن $y \in \varphi^{-1}(\varphi(H))$ عندئذ $\varphi(y) \in \varphi(H)$ ومنه يوجد $h \in H$ بحيث $\varphi(y) = \varphi(h)$ ومنه $\varphi(yh^{-1}) = \overline{e}$ أي أن $yh^{-1} \in Ker\varphi \subseteq H$ وبما أن $h \in H$ نجد أن $y \in H$ وبالتالي $\varphi^{-1}(\varphi(H)) \subseteq H$.

من جهة أخرى، ليكن $x \in H$ عندئذ $\varphi(x) \in \varphi(H)$ ومنه $x \in \varphi^{-1}(\varphi(H))$ أي أن $H \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(H))$ مما سبق نجد أن $\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H$. وهذا يبين لنا أن

$$\forall H \in \Im; \quad \overline{\psi} \circ \overline{\varphi}(H) = H$$

وبالتالي $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi} = I_{\Im}$.

لنبرهن الآن على أن $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi} = I_{\overline{\Im}}$. ليكن $\overline{M} \in \overline{\Im}$ عندئذ

$$\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}(\overline{M}) = \overline{\varphi}(\overline{\psi}(\overline{M})) = \overline{\varphi}(\varphi^{-1}(\overline{M})) = \varphi(\varphi^{-1}(\overline{M}))$$



لنبرهن على أن $\varphi(\varphi^{-1}(\overline{M})) = \overline{M}$. ليكن $x \in \varphi(\varphi^{-1}(\overline{M}))$ عندئذ يوجد $z \in \varphi^{-1}(\overline{M})$ بحيث $x = \varphi(z) \in \overline{M}$ ومنه نجد أن $\varphi(\varphi^{-1}(\overline{M})) \subseteq \overline{M}$.
ليكن $y \in \overline{M}$ وبما أن التشاكل $\varphi$ غامر يوجد $g \in G$ بحيث $\varphi(g) = y \in \overline{M}$ ومنه $g \in \varphi^{-1}(\overline{M})$ وبالتالي $y = \varphi(g) \in \varphi(\varphi^{-1}(\overline{M}))$ أي أن $\overline{M} \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(\overline{M}))$.
مما سبق نجد أن $\varphi(\varphi^{-1}(\overline{M})) = \overline{M}$ وهذا يبين لنا أن

$$\forall \overline{M} \in \overline{\Im}; \quad \overline{\varphi} \circ \overline{\psi}(\overline{M}) = \overline{M}$$

ومنه $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi} = I_{\overline{\Im}}$ وهذا يبين لنا أن التطبيق $\overline{\varphi}$ تقابل.

٢ – لتكن $H \in \Im$ عندئذ $Ker\varphi \subseteq H$.

لزوم الشرط. لنفرض أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$ عندئذ وحسب المبرهنة (٦–١) فإن الزمرة $\varphi(H) = \overline{H}$ تكون ناظمية في الزمرة $\varphi(G) = \overline{G}$.

كفاية الشرط. لنفرض أن الزمرة $\varphi(H) = \overline{H}$ ناظمية في الزمرة $\varphi(G) = \overline{G}$ وحسب المبرهنة (٦–١) فإن الزمرة $H$ تكون ناظمية في $G$.

٣ – لتكن $H \in \Im$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ وحسب(٢) فإن الزمرة $\overline{H}$ ناظمية في $\overline{G}$. بفرض أن $\nu : \overline{G} \to \frac{\overline{G}}{\overline{H}}$ التشاكل القانوني الغامر عندئذ $\varphi \circ \nu : G \to \frac{\overline{G}}{\overline{H}}$ تشاكل زمري غامر وحسب المبرهنة (٦–٣) فإن $\frac{\overline{G}}{\overline{H}} \approx \frac{G}{Ker\nu \circ \varphi}$. لنبرهن على أن $Ker\nu \circ \varphi = H$، ليكن $y \in Ker\nu \circ \varphi$ عندئذ

$$\nu \circ \varphi(y) = \nu(\varphi(y)) = \varphi(y)\overline{H} = \overline{H}$$

ومنه $\varphi(y) \in \overline{H} = \varphi(H)$ وبالتالي $y \in \varphi^{-1}(\varphi(H)) = H$ أي أن $Ker\nu \circ \varphi \subseteq H$.
ليكن $h \in H$ عندئذ

$$\nu \circ \varphi(h) = \nu(\varphi(h)) = \nu(\overline{h}) = \overline{h}\overline{H} = H$$

ومنه نجد أن $h \in Ker\nu \circ \varphi$. مما سبق نجد أن $Ker\nu \circ \varphi = H$، وهذا يبين لنا أن $\frac{\overline{G}}{\overline{H}} \approx \frac{G}{H}$. ◊

بالعودة إلى التطبيق السابق يمكننا ملاحظة أن $\gcd(12,30)=6$. وهنا يحق لنا التساؤل إن كان بالإمكان تعميم النتيجة السابقة من أجل أي عددين صحيحين موجبين. المبرهنة التالية تعطينا جوابا ايجابيا على هذا التساؤل، ولإثبات هذه الحقيقة سوف نذكر بتابع أولر.

**تعريف.**

نسمي التابع $\varphi: N^* \to N^*$ المعرف بالشكل التالي: $\forall n \in N^*$ فإن $\varphi(n)=1$ عندما $n=1$. وعندما $n>1$ فإن $\varphi(n)=s$ حيث $s$ هو عدد جميع الأعداد $k\in N^*$ والتي تحقق $k<n$ و أن $\gcd(k,n)=1$.

سوف نقبل الحقيقة التالية الخاصة بتابع أولر من دون برهان.

**مبرهنة ٦-١٢.**

لتكن $k,n$ أعداداً صحيحة موجبة و $\varphi$ تابع أولر. إن

$$\sum_d \varphi(d)=\gcd(k,n)$$

حيث إن المجموع مأخوذ على جميع القوا سم المشتركة $d$ للعددين $k,n$.

**مبرهنة ٦-١٣.**

إن عدد جميع التشاكلات الزمرية من الزمرة $Z_n$ إلى الزمرة $Z_k$ يساوي $\gcd(k,n)$.

**البرهان.**

لدينا $Z_n=\langle 1\rangle$ ومنه أي تشاكل زمري $f:Z_n\to Z_k$ يحقق $f(h)=hf(1)$ وذلك أيا كان $h\in Z_n$. وهذا يبين لنا أن التشاكل $f$ يتعين بشكل تام بمعرفة $f(1)$. لنفرض أن $f(1)=a$. بما أن $o(1)=n$ وحسب الخاصة (٣) من المبرهنة(٦-١) فإن $o(a)$ تقسم $n$. كذلك بما أن $a\in Z$ فإن $o(a)$ تقسم $k$. لنفرض أن $o(a)=d$. إن $d$ قاسم مشترك للعددين $k,n$. من جهة أخرى، بما أن $d$ يقسم $k$ فإنه حسب المبرهنة(٣-١-٩) توجد في $Z_k$ زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها $d$ وهي $\left\langle \frac{k}{d}\right\rangle$. وحسب المبرهنة(٣-١-٨) فإن كل عدد $s$ أصغر من $d$ ويحقق $\gcd(s,d)=1$ يكون مولدا لهذه الزمرة



الجزئية. وحسب تعريف تابع أولر فإن عدد جميع مولدات الزمرة $\left\langle \frac{k}{d}\right\rangle$ يساوي $\varphi(d)$ حيث $\varphi$ تابع أولر. وبما أن كل تشاكل زمري من الزمرة $Z_n$ إلى الزمرة $Z_k$ يصور 1 بأحد مولدات الزمرة $\left\langle \frac{k}{d}\right\rangle$ وذلك من أجل كل قاسم مشترك $d$ للعددين $k,n$. وهذا يبين لنا أن عدد جميع التشاكلات الزمرية من الزمرة $Z_n$ إلى الزمرة $Z_k$ يساوي $\sum_d \varphi(d)$ حيث أن المجموع مأخوذ على جميع القوا سم المشتركة للعددين $k,n$. وحسب المبرهنة(٦-١١) فإن $\sum_d \varphi(d)=\gcd(k,n)$ .

نأتي الآن لدراسة العلاقة بين الزمر وزمرة التعويضات لمجموعة وذلك من خلال مبرهنة كايلي. لأجل ذلك لابد لنا من التمهيدية التالية:

**تمهيدية ٦-١٤.**

لتكن $G$ زمرة و $g\in G$. عندئذ:

١- العلاقة $T_g:G\to G$ المعرفة بالشكل $T_g(x)=gx, \quad \forall x\in G$ هي تقابل.

٢- المجموعة $\overline{G}=\{T_g, \quad g\in G\}$ هي زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات.

٣- $G\approx\overline{G}$.

**البرهان.**

١ – نتركه للقارئ.

٢ – واضح أن المجموعة $\overline{G}$ غير خالية لأن التطبيق $T_e$ هو عنصر من $\overline{G}$. كما أن $\overline{G}$ مغلقة بالنسبة إلى عملية تركيب التطبيقات، لأنه أيا كان $T_g,T_h\in\overline{G}$ فإن $T_g\circ T_h=T_{gh}\in\overline{G}$ وذلك لأنه أيا كان $x\in G$ فإن

$$T_g\circ T_h(x)=T_g(T_h(x))=T_g(hx)=g(hx)=(gh)x=T_{gh}(x)$$

وهذا يبين لنا أن $T_g\circ T_h=T_{gh}$. وبما أن العملية ($\circ$) تجميعية وأن $\overline{G}$ تحوي عنصر حيادي $T_e$ ولكل عنصر $T_g$ مقلوب هو $(T_g)^{-1}=T_{g^{-1}}$ (تأكد من ذلك). نجد أن المجموعة $\overline{G}$ زمرة.

٣ - لنعرف العلاقة $\varphi : G \to \overline{G}$ بالشكل $\varphi(g) = T_g$ وذلك أيا كان $g \in G$. فنجد أن $\varphi$ تطبيق متباين، لأنه أيا كان $g, h \in G$ فإن

$$g = h \Leftrightarrow gx = hx, \forall x \in G \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow T_g(x) = T_h(x), \forall x \in G \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow T_g = T_h \Leftrightarrow \varphi(g) = \varphi(h)$$

كما أن التطبيق $\varphi$ هو تشاكل لأنه أيا كان $g, h \in G$ فإن $\varphi(gh) = T_{gh} = T_g \circ T_h$. ومن الواضح أن التطبيق $\varphi$ غامر. مما سبق نجد أن $\varphi$ تماثل وبالتالي $G \approx \overline{G}$. ◊

**مبرهنة ٦-١٥.** $(Cayley - 1854)$.

كل زمرة تماثل زمرة جزئية من زمرة تباديل.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة و $D$ زمرة التباديل للمجموعة $G$. حسب التمهيدية (٦-١٣) فإن $G \approx \overline{G} \subseteq D$. ◊

**مبرهنة ٦-١٦. (مبرهنة كايلي المعممة).**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$ و $S$ زمرة التباديل لمجموعة المرافقات اليسارية للزمرة $H$ في $G$. عندئذ يوجد تشاكل زمري $\alpha : G \to S$ يحقق:

١ - $Ker\alpha \subseteq H$.

٢ - إذا كانت $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ تحقق $K \subseteq H$ عندئذ $K \subseteq Ker\alpha$.

**البرهان.**

لنفرض أن $M = \{aH : a \in H\}$ مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة $H$ في $G$ وأن

$$S = \{T_g : g \in G\}$$

حيث $T_g : M \to M$ وأن $T_g(aH) = (ga)H$ وذلك أيا كان $aH \in M$. ولنعرف العلاقة $\alpha : G \to S$ بالشكل $\alpha(g) = T_g$ وذلك أيا كان $g \in G$. فنجد أن العلاقة $\alpha$ تطبيق لأنه إذا كان $g_1, g_2 \in G$ بحيث $g_1 = g_2$ فإن $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$ وبالتالي $g_1(aH) = g_2(aH)$ وذلك أيا كان $aH \in M$ ومنه $(g_1a)H = (g_2a)H$



أي أن $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$. كذلك التطبيق $\alpha$ تشاكل لأن $\alpha(g_1g_2) = T_{g_1g_2}$ وأنه أيا كان $aH \in M$ فإن

$$T_{g_1g_2}(aH) = ((g_1g_2)a)H = g_1(g_2a)H = T_{g_1}((g_2a)H) =$$
$$= T_{g_1}(T_{g_2}(aH)) = T_{g_1} \circ T_{g_2}(aH)$$

ومنه $T_{g_1g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2}$ أي أن $\alpha(g_1g_2) = \alpha(g_1) \circ \alpha(g_2)$.

١ - ليكن $g \in Ker\alpha$ عندئذ $\alpha(g) = T_g, \alpha(g) = T_e$ أي أن $T_g = T_e$ وبما أن $H \in M$ نجد أن $H = T_e(H) = T_g(H) = gH$ ومنه فإن $g \in H$ أي أن $Ker\alpha \subseteq H$.

٢ - لتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ وأن $K \subseteq H$ عندئذ أيا كان $a \in G$ فإن $K = aKa^{-1}$. ومنه أيا كان $k \in K$ يوجد $k' \in K$ بحيث $k = ak'a^{-1}$ أي أن $ka = ak'$ ومنه نجد أن

$$T_k(aH) = (ka)H = (ak')H = a(k'H) = aH$$

ومنه نجد أن $T_k = \alpha(k)$ هو التطبيق المطابق وبالتالي $k \in Ker\alpha$ وهذا يبين لنا أن $K \subseteq Ker\alpha$. ◊

**نتيجة.**

لتكن $G$ زمرة منتهية و $H \neq G$ زمرة جزئية من $G$ تحقق أن مرتبة الزمرة $G$ لا تقسم $(G:H)!$. عندئذ فإن الزمرة $H$ تحوي زمرة جزئية ناظمية $K$ من $G$ بحيث $K \neq \langle e \rangle$.

**البرهان.**

ليكن $\alpha : G \to S$ التشاكل الموجود بحسب المبرهنة (٦-١٥). عندئذ فإن $Ker\alpha$ زمرة جزئية ناظمية تحقق $Ker\alpha \subseteq H$ وأن $G / Ker\alpha$ تماثل زمرة جزئية من الزمرة $S$ حيث $S$ هي زمرة التباديل لمجموعة المرافقات اليسارية للزمرة $H$ في $G$. ومنه $(G / Ker\alpha : 1)$ بحسب مبرهنة لاغرانج تقسم $(S:1) = (G:H)!$. وبما أن $(G:1)$ لا تقسم $(G:H)!$ فإن $(Ker\alpha : 1) > 1$. ◊

# تمـــــاريـن محـلـــولــة ( ٦ )

١- لتكن $n,k$ أعداداً صحيحة موجبة، ولنفرض أن $k$ يقسم $n$. عندئذ:

أ - يوجد تشاكل زمري من الزمرة $U(n)$ إلى الزمرة $U(k)$ نواته $U_k(n)$.

ب - $Z_n/\langle k\rangle \approx Z_k$.

**الحـل.**

أ - ليكن $x\in U(n)$ عندئذ $x<n$ وأن $\gcd(x,n)=1$. وحسب خوارزمية القسمة، يوجد $q,r\in Z$ بحيث $x=qk+r$ وأن $0\le r<k$. إن $r\ne 0$ لأنه إذا كان $r=0$ فإن $x=qk$، أي أن $k$ يقسم $x$ وبما أن $k$ يقسم $n$ فرضا نجد أن $k$ يقسم كلاً من $n,x$ وهذا يناقض كون $\gcd(x,n)=1$. ومنه $0<r<k$. كما أن $\gcd(r,k)=1$، لأنه إذا كان $\gcd(r,k)=d>1$ نجد أن $d$ يقسم $k$ ولكون $k$ يقسم $n$ فإن $d$ يقسم $n$. من جهة أخرى، يوجد $\alpha,\beta\in Z$ بحيث $r=d\alpha,\quad k=d\beta,$ ومنه $x=(q\beta+\alpha)d$ وهذا يبين لنا أن $d$ يقسم كلاً من $n,x$، مما يناقض كون $\gcd(x,n)=1$. مما سبق نجد أن $r\in U(k)$. لنعرف العلاقة $\varphi:U(n)\to U(k)$ بالشكل

$$\forall x\in U(n);\quad \varphi(x)=r=x\,\mathrm{mod}\text{-}k$$

فنجد أن $\varphi$ تطبيق، لأنه $\forall x,y\in U(n)$ بحيث $x=y$ فإن $x\,\mathrm{mod}\text{-}k=y\,\mathrm{mod}\text{-}k$ وهذا يبين لنا أن $\varphi(x)=\varphi(y)$. كذلك $\varphi$ تشاكل، لأنه وبالاعتماد على المبرهنة(١-٦-٤) فإن

$$\varphi(x.y)=(xy)\,\mathrm{mod}\text{-}k=(x\,\mathrm{mod}\text{-}k)(y\,\mathrm{mod}\text{-}k)=\varphi(x)\varphi(y)$$

لنبرهن أن $Ker\varphi=U_k(n)$. ليكن $x\in Ker\varphi$ عندئذ $\varphi(x)=x\,\mathrm{mod}\text{-}k=1$ ومنه $x\in U_k(n)$ وبالتالي $Ker\varphi\subseteq U_k(n)$. بشكل مشابه يبرهن على الاحتواء المعاكس.
مما سبق نجد أن $Ker\varphi=U_k(n)$.



ب - لنعرف العلاقة $f:Z_n\to Z_k$ بالشكل $f(x)=x\,\mathrm{mod}\text{-}k\,;\quad \forall x\in Z_n$. فنجد أن $f$ تشاكل زمري غامر وأن $Kerf=\langle k\rangle$، وحسب المبرهنة(٦-٣) نجد أن $Z_n/\langle k\rangle\approx Z_k$.

٢ - نقول عن الزمرة $G$ إنها زمرة فتل إذا كان كل عنصر من $G$ مرتبته منتهية أي

$$\forall g\in G;\quad o(g)\in N^*$$

١ - إذا كانت الزمرة $G$ هي زمرة فتل فإن أية زمرة جزئية من $G$ هي زمرة فتل.

٢ - لتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. إذا كانت الزمرة $G$ زمرة فتل فإن الزمرة $G/K$ هي أيضا زمرة فتل.

٣ - لتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. إذا كان كل من الزمرتين $K$ و $G/K$ زمرة فتل فإن الزمرة $G$ هي زمرة فتل.

**الحـل.**

١ - واضح.

٢ - لنفرض أن الزمرة $G$ هي زمرة فتل وأن $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. وليكن $\bar g\in G/K$ عندئذ $\bar g=gK$ حيث $g\in G$ وبما أن الزمرة $G$ هي زمرة فتل فإن $o(g)\in N^*$. لنفرض أن $o(g)=n$ عندئذ

$$\bar g^n=(gK)^n=g^nK=K$$

وبالتالي تكون $o(\bar g)=n$ أي أن $o(\bar g)\in N^*$ ومنه الزمرة $G/K$ هي زمرة فتل.

٣ - لتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ ولنفرض أن الزمرتين $K$ و $G/K$ هما زمرتا فتل وليكن $g\in G$. إذا كان $g\in K$ فإن $o(g)\in N^*$. لنفرض أن $g\notin K$ عندئذ $\bar g=gK\in G/K$ وبما أن الزمرة $G/K$ هي زمرة فتل يوجد $m\in N^*$ بحيث $o(\bar g)=m$ ومنه $K=\bar g^m=(gK)^m=g^mK$ وبالتالي فإن العنصر $g^m\in K$ وبما أن الزمرة $K$ هي زمرة فتل فإن $o(g^m)\in N^*$. لنفرض أن $o(g^m)=n$ عندئذ $o(g)=nm$. مما سبق نجد أن الزمرة $G$ هي زمرة فتل.

٣ - لتكن $G,\overline{G}$ زمرتين ما و $e,\overline{e}$ حيادياً كل من $G,\overline{G}$ على الترتيب و $f:G\to\overline{G}$ تشاكل زمري و $K$ زمرة جزئية من الزمرة $\overline{G}$. عندئذ:

١ - $f^{-1}(K)$ زمرة جزئية من $G$ تحوي $Kerf$.

٢ - إذا كانت $H$ زمرة جزئية من $G$ تحوي $Kerf$ وتحقق $f(H)=K$ فإن $f^{-1}(K)=H$.

**الحل.**

١ - لتكن $K$ زمرة جزئية من الزمرة $\overline{G}$ وحسب المبرهنة (٦-١) فإن $f^{-1}(K)$ زمرة جزئية من $G$. ليكن $x\in Kerf$ عندئذ $f(x)=\overline{e}\in K$ ومنه $x\in f^{-1}(K)$ وبالتالي فإن $Kerf\subseteq f^{-1}(K)$.

٢ - لتكن $H$ زمرة جزئية من $G$ تحوي $Kerf$ وتحقق $f(H)=K$ وليكن $h\in H$ عندئذ $f(h)\in f(H)=K$ ومنه $h\in f^{-1}(K)$ أي أن $H\subseteq f^{-1}(K)$. ليكن $x\in f^{-1}(K)$ عندئذ فإن $f(x)\in K=f(H)$ ومنه يوجد $y\in H$ بحيث $f(x)=f(y)$ وبالتالي $f(xy^{-1})=\overline{e}$ أي أن $xy^{-1}\in Kerf\subseteq H$ ومنه فإن $x\in Hy=H$ وهذا يبين لنا أن $f^{-1}(K)\subseteq H$ مما سبق نجد أن $f^{-1}(K)=H$. ◦

٤ - ليكن $f:G\to\overline{G}$ تشاكلاً زمرياً غامراً و $K$ زمرة جزئية من $\overline{G}$ بحيث $(\overline{G}:K)=n<\infty$. إذا كان $H=f^{-1}(K)$ عندئذ $(G:H)=n$.

**الحل.**

لنفرض أن $(\overline{G}:K)=n$ وأن $H=f^{-1}(K)$. ولنفرض أن $\overline{g}_1K,\overline{g}_2K,\cdots,\overline{g}_nK$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة $K$ في $\overline{G}$. وبما أن التشاكل $f$ فإنه يوجد $g_i\in G$ بحيث $f(g_i)=\overline{g}_i$ لأجل جميع $1\le i\le n$. لنبرهن على أن $g_1H,g_2H,\cdots g_nH$ هي جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة $H$ في $G$.

لنفرض أن $g_iH=g_jH$ عندئذ $g_i^{-1}g_j\in H$ ومنه

$$\overline{g}_i^{-1}\overline{g}_j=(f(g_i))^{-1}f(g_j)=f(g_i^{-1})f(g_j)=f(g_i^{-1}g_j)\in f(H)\subseteq K$$

وهذا يبين لنا أن $\overline{g}_iK=\overline{g}_jK$ وحسب الفرض فإن $i=j$.



لتكن $gH$ مرافقة يسارية للزمرة $H$ في $G$ عندئذ $f(g)\in\overline{G}=\bigcup_{i=1}^{n}g_iK$ ومنه يوجد دليل $1\le t\le n$ بحيث $f(g)\in\overline{g}_tK=f(g_t)K$ وبالتالي يوجد $k\in K$ من أجله $f(g)=\overline{g}_tk$. وبما أن $g,g_t\in G$ لنفرض أن $x=g_t^{-1}g$ عندئذ

$$f(x)=f(g_t^{-1}g)=(f(g_t))^{-1}f(g)=\overline{g}_t^{-1}\overline{g}k=k\in K$$

أي أن $f(g_t^{-1}g)\in K$ ومنه $g_t^{-1}g\in f^{-1}(K)=H$ وبالتالي $g\in g_tH$ وهكذا فإن $gH=g_tH$، مما سبق نجد أن $(G:H)=n$. ◦

## تمارين ( ٦ )

١- أثبت أن الزمرتين $U(10)$, $U(8)$ غير متماثلتين.

٢- أثبت أن الزمرتين $U(12)$, $U(8)$ متماثلتان.

٣- لتكن $G$ زمرة. أثبت أن التطبيق $f:G\to G$ المعرف بالشكل $f(g)=g^{-1}$ أياً كان $g\in G$ يكون تماثلاً للزمرة $G$ عندما وفقط عندما تكون الزمرة $G$ تبديلية.

٤- أثبت أن التطبيق $\alpha:U(16)\to U(16)$ المعرف بالشكل $\alpha(x)=x^3$ أياً كان $x\in U(16)$ هو تماثل للزمرة $U(16)$. هل يبقى $\alpha$ تماثلاً إذا كانت قاعدة ربطه $\alpha(x)=x^7$ , $\alpha(x)=x^5$؟

٥- بين فيما إذا كانت الزمرتان $U(20)$, $U(24)$ متماثلتين أم لا.

٦- أثبت أن التطبيق $f(a+ib)=a-ib$ هو تماثل لزمرة الأعداد العقدية بالنسبة إلى عملية جمع الأعداد العقدية.

٧- لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية مرتبتها $m$ وليكن $n$ عدداً صحيحاً موجباً يحقق $\gcd(m,n)=1$. أثبت أن التطبيق $f:G\to G$ المعرف بالشكل $f(a)=a^n$ هو تماثل للزمرة $G$.

٨- لنفرض أن $\varphi: Z_{30}\to Z_{30}$ تشاكل وأن $Ker\varphi=\{0,10,20\}$. إذا كان $\varphi(23)=6$ ، أوجد $\varphi^{-1}(6)$، ثم عين التشاكل $\varphi$.

٩- ليكن $f:Z_{12}\to Z_{10}$ تطبيقاً معرفاً بالشكل التالي $f(x)=3x$ ، $\forall x\in Z_{12}$. بين فيما إذا كان $f$ تشاكلاً أم لا.

١٠- لنفرض أن $\varphi:U(30)\to U(30)$ تشاكل وأن $Ker\varphi=\{1,11\}$. إذا كان $\varphi(7)=7$ أوجد $\varphi^{-1}(7)$، ثم عين التشاكل $\varphi$.

١١- لنفرض أن $f:U(40)\to U(40)$ تشاكل وأن $Kerf=\{1,9,17,33\}$. إذا كان $f(11)=11$ أوجد $f^{-1}(11)$، ثم عين التشاكل $f$.

١٢- لتكن $G$ زمرة منتهية و $f:G\to Z_{10}$ تشاكلاً زمرياً. أثبت أن مرتبة الزمرة $G$ تقبل القسمة على 10.

١٣- ما هو عدد التشاكلات الزمرية من الزمرة $Z_{20}$ إلى الزمرة $Z_8$.

١٤- ما هو عدد التشاكلات الزمرية من الزمرة $Z_{20}$ إلى الزمرة $Z_{10}$.



# الفصل السابع

## زمرة التماثلات

في هذا الفصل سوف ندرس أنواعاً محددة من التماثلات الزمرية.

**تعريف.**

لتكن $G,\overline{G}$ زمرتين و $f:G\to\overline{G}$ تشاكلاً زمرياً. نقول عن التشاكل $f$ أنه تماثل زمري إذا كان $f$ متبايناً وغامراً. إذا كانت $\overline{G}=G$ فإننا نقول عن التماثل $f$ إنه أوتومورفيزم أو تماثل للزمرة $G$. ونرمز لمجموعة تماثلات الزمرة $G$ بالرمز $Aut(G)$.

**تمهيدية ٧-١.**

لتكن $G$ زمرة. إن مجموعة تماثلات الزمرة $G$، أي $Aut(G)$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات.

**البرهان.**

نتركه للقارئ.

إن أول من درس الزمرة $Aut(G)$ هو $O.Holder$ عام ١٨٩٣ وتلاه $E.H.Moore$ عام ١٨٩٤ وبشكل مستقل عن الأخر. من خلال المبرهنة التالية سوف ندرس خواص بعض العناصر في الزمرة $Aut(G)$.

**مبرهنة ٧-٢.**

لتكن $G$ زمرة و $a\in G$. ولتكن $T_a:G\to G$ علاقة معرفة بالشكل $\forall x\in G$ فإن $T_a(x)=axa^{-1}$. عندئذ:

١- $T_a$ تماثل للزمرة $G$.

٢- $(T_a)^{-1}=T_{a^{-1}}$.

**البرهان.**

١ – ليكن $x_1, x_2 \in G$ بحيث $x_1 = x_2$، عندئذ $ax_1a^{-1} = ax_2a^{-1}$ وبالتالي $T_a(x_1) = T_a(x_2)$ أي أن العلاقة $T_a$ تطبيق. كما أن التطبيق $T_a$ متباين، لأنه إذا كان $T_a(x_1) = T_a(x_2)$ فإن $ax_1a^{-1} = ax_2a^{-1}$ وبالتالي $x_1 = x_2$. وهو تشاكل، لأن

$$T_a(x_1x_2) = a(x_1x_2)a^{-1} = (ax_1a^{-1})(ax_2a^{-1}) = T_a(x_1)T_a(x_2)$$

كذلك $T_a$ غامر، لأنه إذا كان $y \in G$ فإن $a^{-1}ya \in G$ وبالتالي

$$T_a(a^{-1}ya) = (aa^{-1})y(aa^{-1}) = y$$

وهذا يبين لنا أن التطبيق $T_a$ هو تماثل للزمرة $G$.

٢ – وجدنا حسب (١) أن $(T_a)^{-1}$ هو تماثل للزمرة $G$ ويحقق

$$T_a \circ (T_a)^{-1} = (T_a)^{-1} \circ T_a = T_e$$

ومنه أياً كان $x \in G$ فإن

$$[T_a \circ (T_a)^{-1}](x) = T_a(T_a^{-1}(x)) = x$$

وبالتالي $aT_a^{-1}(x)a^{-1} = x$ أي أن $T_a^{-1}(x) = a^{-1}xa = T_{a^{-1}}(x)$، وهذا يبين لنا أن $(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}$. ٥

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $a \in G$. نسمي التماثل $T_a$ بالتماثل الداخلي للزمرة $G$. نرمز لمجموعة التماثلات الداخلية للزمرة $G$ بالرمز $Inn(G)$.

خواص المجموعة $Inn(G)$ وعلاقتها بالزمرة $Aut(G)$ ندرسها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٧-٣.**

لتكن $G$ زمرة. عندئذ:

١- $Inn(G)$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $Aut(G)$.

٢- $G/Z(G) \approx Inn(G)$.

**البرهان.**



١ – لنبرهن في البداية على أن $Inn(G)$ زمرة جزئية من الزمرة $Aut(G)$. واضح أن $Inn(G) \subseteq Aut(G)$. كما أن $Inn(G) \neq \Phi$ لأن العنصر $T_e \in Inn(G)$، حيث $T_e(x) = exe^{-1} = x$ وذلك أياً كان $x \in G$. ليكن $T_a, T_b \in Inn(G)$ عندئذ أياً كان $x \in G$ فإن

$$(T_a \circ T_b^{-1})(x) = T_a \circ T_{b^{-1}}(x) = T_a(b^{-1}xb) = (ab^{-1})x(ba^{-1}) =$$
$$= (ab^{-1})x(ab^{-1})^{-1} = T_{ab^{-1}}(x)$$

أي أن $T_a \circ T_b^{-1} = T_{ab^{-1}} \in Inn(G)$. بهذا الشكل نجد أن $Inn(G)$ زمرة جزئية من الزمرة $Aut(G)$. لنبرهن الآن على أن الزمرة الجزئية $Inn(G)$ ناظمية في $Aut(G)$.

ليكن $\varphi \in Aut(G)$. ولنبرهن أن

$$\varphi \circ Inn(G) \circ \varphi^{-1} \subseteq Inn(G).$$

ليكن $\psi \in \varphi \circ Inn(G) \circ \varphi^{-1}$ عندئذ يوجد $T_a \in Inn(G)$ بحيث $\psi = \varphi \circ T_a \circ \varphi^{-1}$

ومنه أياً كان $x \in G$ فإن

$$\psi(x) = \varphi \circ T_a \circ \varphi^{-1}(x) = \varphi \circ T_a(\varphi^{-1}(x)) = \varphi(a\varphi^{-1}(x)a^{-1}) =$$
$$= \varphi(a)x\varphi^{-1}(a) = T_{\varphi(a)}(x)$$

ومنه نجد أن

$$\psi = \varphi \circ T_a \circ \varphi^{-1} = T_{\varphi(a)} \in Inn(G)$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية $Inn(G)$ ناظمية في الزمرة $Aut(G)$.

٢ – لنعرف العلاقة $\Theta : G \to Inn(G)$ بالشكل التالي: أياً كان $a \in G$ فإن $\Theta(a) = T_a$. إن العلاقة $\Theta$ تطبيق، لأنه أياً كان $a_1, a_2 \in G$ بحيث $a_1 = a_2$، عندئذ $a_1xa_1^{-1} = a_2xa_2^{-1}$ وذلك أياً كان $x \in G$ ومنه $T_{a_1}(x) = T_{a_2}(x)$ وهذا يبين لنا أن $T_{a_1} = T_{a_2}$ وبالتالي $\Theta(a_1) = \Theta(a_2)$. كذلك التطبيق $\Theta$ تشاكل، لأنه وبما أن $\Theta(a_1a_2) = T_{a_1a_2}$ ومنه أياً كان $y \in G$ فإن

$$T_{a_1a_2}(y) = (a_1a_2)y(a_1a_2)^{-1} = a_1(a_2ya_2^{-1})a_1^{-1} = T_{a_1}(a_2ya_2^{-1}) = T_{a_1} \circ T_{a_2}(y)$$

وهذا يبين لنا أن $T_{Ta_1a_2} = T_{a_1} \circ T_{a_2}$ ومنه.

$\Theta(a_1a_2) = T_{a_1a_2} = T_{a_1} \circ T_{a_2} = \Theta(a_1)\circ\Theta(a_2)$.

مما سبق نجد أن التطبيق $\Theta$ هو تشاكل، وهو غامر(تأكد من ذلك). وحسب مبرهنة التماثل الأولى فإن $G/Ker\Theta \approx Inn(G)$.

لنبرهن الآن على أن $Ker\Theta = Z(G)$. ليكن $a\in Ker\Theta$ عندئذ $\Theta(a)=T_a=T_e$ ومنه أياً كان $x\in G$ فإن $T_a(x)=T_e(x)$ وبالتالي $axa^{-1}=x$ أي أن $ax=xa$ وهذا يبين لنا أن $a\in Z(G)$، أي أن $Ker\Theta\subseteq Z(G)$. ليكن $b\in Z(G)$ عندئذ أياً كان $y\in G$ فإن $ay=ya$ ومنه $aya^{-1}=y$ وبالتالي $T_a(y)=T_e(y)$، وهكذا فإن $\Theta(a)=T_a=T_e$. أي أن $Z(G)\subseteq Ker\Theta$. مما سبق نجد أن $Ker\Theta = Z(G)$، أي أن $G/Z(G)\approx Inn(G)$.

من أجل بعض الزمر المنتهية $G$ فإن زمرة التماثلات $Aut(G)$ لها خاصة هامة جداً، وقبل البدء بدراسة هذه الخاصة، لندرس التطبيق التالي من أجل $G=Z_{10}$.

**تطبيـــق.**

لنأخذ الزمرة $G=Z_{10}$. لنوجد الزمرة $Aut(Z_{10})$.

**الحـــل.**

لدينا

$$Z_{10}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

وهي زمرة دوارة أحد مولداتها هو 1. ليكن $\alpha\in Aut(Z_{10})$. إن $\alpha$ هو تماثل للزمرة $Z_{10}$ ومنه أياً كان $k\in Z_{10}$ فإن

$$\alpha(k)=\alpha(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k-once})=\underbrace{\alpha(1)+\alpha(1)+\cdots+\alpha(1)}_{k-once}=k\alpha(1)$$

لنوجد قيمة $\alpha(1)$. بما أن $\alpha$ تماثل للزمرة $Z_{10}$، فإنه حسب التمهيدية (٦-٨) فإن $o(\alpha(1))=o(1)=10$. وأن $1,3,7,9\in Z_{10}$ هي جميع العناصر من $Z_{10}$ والتي مرتبة كل منها 10 (تأكد من ذلك). ومنه فإن قيمة $\alpha(1)$ لها أربع احتمالات وهي

$$\alpha(1)=1,\quad \alpha(1)=3,\quad \alpha(1)=7,\quad \alpha(1)=9$$



لنفرض أن $\alpha_1$ هو التطبيق من $Z_{10}$ إلى $Z_{10}$ والذي يصور $1\in Z_{10}$ بنفسه أي $1\to 1$ وأن $\alpha_3$ هو التطبيق $1\to 3$ وأن $\alpha_7$ هو التطبيق $1\to 7$ وأن $\alpha_9$ هو التطبيق $1\to 9$.

لنبرهن أن كلاً من $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_7,\alpha_9$ هي تماثلات للزمرة $Z_{10}$. لدينا

$$\alpha_1(1)=1,\quad \alpha_3(1)=3,\quad \alpha_7(1)=7,\quad \alpha_9(1)=9$$

من الواضح أن $\alpha_1$ هو التماثل المطابق. من أجل $\alpha_3$ لدينا $\alpha_3(1)=3$ وأن

$$\alpha_3(2)=\alpha_3(1+1)=\alpha_3(1)+\alpha_3(1)=3+3=6$$

كما أن

$$\alpha_3(3)=9,\quad \alpha_3(4)=2,\quad \alpha_3(5)=5,\quad \alpha_3(6)=8$$
$$\alpha_3(7)=1,\quad \alpha_3(8)=4,\quad \alpha_3(9)=7,\quad \alpha_3(0)=10$$

بهذا الشكل نجد أن $\alpha_3:Z_{10}\to Z_{10}$ متباين، وبما أن الزمرة $Z_{10}$ منتهية فإن $\alpha_3$ غامر. وهكذا نجد أن التطبيق $\alpha_3$ هو تقابل. لنبرهن على أن $\alpha_3$ تشاكل. ليكن $a,b\in Z_{10}$ عندئذ:

$$\alpha_3(a+b)=3(a+b)=3a+3b=\alpha_3(a)+\alpha_3(b)$$

مما سبق نجد أن التطبيق $\alpha_3:Z_{10}\to Z_{10}$ هو تماثل للزمرة $Z_{10}$.

بشكل مشابه نجد أن كلاً من $\alpha_7,\alpha_9$ هي أيضا تماثلات للزمرة $Z_{10}$. كما أنه على سبيل المثال $\alpha_3\circ\alpha_3=\alpha_9$ لأن

$$\alpha_3\circ\alpha_3(1)=\alpha_3(3)=3.3=9=\alpha_9(1)$$

وهذا يبين لنا أن $\alpha_3\circ\alpha_3=\alpha_9$. وبذلك يمكننا الحصول على الجدول التالي بالنسبة إلى عملية تركيب التطبيقات المعرفة على الزمرة $Aut(Z_{10})$.

| $U(10)$ | 1 | 3 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 7 | 9 |
| 3 | 3 | 9 | 1 | 7 |
| 7 | 7 | 1 | 9 | 3 |
| 9 | 9 | 7 | 3 | 1 |

جدول الزمرة $U(10)$

| $Aut(Z_{10})$ | $\alpha_1$ | $\alpha_3$ | $\alpha_7$ | $\alpha_9$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | $\alpha_1$ | $\alpha_3$ | $\alpha_7$ | $\alpha_9$ |
| $\alpha_3$ | $\alpha_3$ | $\alpha_9$ | $\alpha_1$ | $\alpha_7$ |
| $\alpha_7$ | $\alpha_7$ | $\alpha_1$ | $\alpha_9$ | $\alpha_3$ |
| $\alpha_9$ | $\alpha_9$ | $\alpha_7$ | $\alpha_3$ | $\alpha_1$ |

جدول الزمرة $Aut(Z_{10})$

وبمقارنة جدول الزمرة $Aut(Z_{10})$ مع جدول الزمرة $U(10)=\{1,3,7,9\}$ نجد أن $Aut(Z_{10})\approx U(10)$.

إن النتيجة التي توصلنا إليها من خلال التطبيق السابق صحيحة لأجل كل عدد صحيح $n>1$. ولإثبات هذه الحقيقة لابد لنا من المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٧-٤.**

ليكن $n\ge1$ عدداً صحيحاً. عندئذ لأجل كل عدد صحيح $0<r<n$ ويحقق $\gcd(r,n)=1$ يوجد تماثل للزمرة $Z_n$.

**البرهان.**

ليكن $0<r<n$ عدد صحيح ويحقق $\gcd(r,n)=1$. ولنعرف العلاقة $\varphi: Z_n\to Z_n$ بالشكل التالي: أياً كان $k\in Z_n$ فإن $\varphi(k)=r.k \text{ mod}-n$. فنجد أنه أياً كان $k_1,k_2\in Z_n$ بحيث $k_1=k_2$ فإن $rk_1=rk_2$ وبالتالي

$$rk_1 \text{ mod}-n = rk_2 \text{ mod}-n$$

وهذا يبين لنا أن $\varphi(k_1)=\varphi(k_2)$. كما أن التطبيق $\varphi$ متباين، لأنه إذا كان $\varphi(k_1)=\varphi(k_2)$ عندئذ $rk_1 \text{ mod}-n = rk_2 \text{ mod}-n$، وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q_1,q_2,r_1\in Z$ بحيث

$rk_1=q_1n+r_1$ و $rk_2=q_2n+r_1$ وأن $0\le r_1<n$.

ومنه $r(k_1-k_2)=(q_1-q_2)n$. لنفرض جدلاً أن $k_1-k_2\neq0$ عندئذ $q_1-q_2\neq0$ وبما أن $\gcd(r,n)=1$، يوجد $t,s\in Z$ بحيث $1=rt+ns$ أي أن $sn=1-rt$. كذلك $sr(k_1-k_2)=sn(q_1-q_2)$ ومنه $sr(k_1-k_2)=(1-rt)(q_1-q_2)$ وبالتالي



$$sr(k_1-k_2)=(q_1-q_2)-rt(q_1-q_2)$$

أي أن $r(s(k_1-k_2)+t(q_1-q_2))=(q_1-q_2)$ ومنه فإن $r$ يقسم $(q_1-q_2)$. بفرض أن $a=s(k_1-k_2)+t(q_1-q_2)$ نجد $ra=(q_1-q_2)$. وهكذا فإن $r(k_1-k_2)=ran$ وبالتالي $k_1-k_2=an$، أي أن $n$ يقسم $k_1-k_2$ وهذا يناقض كون $k_1-k_2<n$. مما سبق نجد أن $k_1-k_2=0$ وبالتالي $k_1=k_2$. وبما أن الزمرة $Z_n$ منتهية فإن $\varphi$ غامر، وهذا يبين لنا أن $\varphi$ تقابل. ولنبرهن على أنه تشاكل ليكن $k_1,k_2\in Z_n$ عندئذ

$$\varphi(k_1+k_2)=r(k_1+k_2)\text{ mod}-n=(rk_1+rk_2)\text{ mod}-n=$$
$$rk_1\text{ mod}-n+rk_2\text{ mod}-n=\varphi(k_1)+\varphi(k_2)$$

وذلك بالاعتماد على المبرهنة(١-٦-٤). مما سبق نجد أن $\varphi$ هو تماثل للزمرة $Z_n$.

نأتي الآن إلى المبرهنة التي تبين لنا طبيعة الزمرة $Aut(Z_n)$.

**مبرهنة ٧-٥.**

ليكن $n\ge1$ عدداً صحيحاً. عندئذ $Aut(Z_n)\approx U(n)$.

**البرهان.**

ليكن $\alpha\in Aut(Z_n)$. كما وجدنا في التطبيق السابق، فإن $\alpha$ يتعيين بتعيين القيمة $\alpha(1)$ حيث $\alpha(1)\in U(n)$. لنعرف العلاقة $T:Aut(Z_n)\to U(n)$ بالشكل التالي: أياً كان $\alpha\in Aut(Z_n)$ فإن $T(\alpha)=\alpha(1)$. فنجد أن $T$ تطبيق، لأنه إذا كان $\alpha,\beta\in Aut(Z_n)$ بحيث $\alpha=\beta$ فإن $\alpha(1)=\beta(1)$ وبالتالي $T(\alpha)=T(\beta)$. كذلك $T$ متباين، لأنه إذا كان $T(\alpha)=T(\beta)$ عندئذ $\alpha(1)=\beta(1)$ وبالتالي أياً كان $k\in Z_n$ فإن $k\alpha(1)=k\beta(1)$ أي أن $\alpha(k)=\beta(k)$، ومنه $\alpha=\beta$.بالاضافة لذلك فإن $T$ غامر، لأنه إذا كان $r\in U(n)$ فإن $0<r<n$ وأن $\gcd(n,r)=1$. وحسب المبرهنة(٧-٤) يوجد تماثل $\varphi$ للزمرة $Z_n$ وأن $T(\varphi)=\varphi(1)=r$ وذلك حسب تعريف $\varphi$ في المبرهنة(٧-٤). مما سبق نجد أن $T$ تقابل. لنبرهن على أن $T$ تشاكل. ليكن $\alpha,\beta\in Aut(Z_n)$ عندئذ

$$T(\alpha\circ\beta)=\alpha\circ\beta(1)=\alpha(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\beta(1)-once})=\underbrace{\alpha(1)+\alpha(1)+\cdots+\alpha(1)}_{\beta(1)-once}=$$
$$=\alpha(1)\beta(1)=T(\alpha)T(\beta)$$

مما سبق نجد أن $T$ تماثل. ◊

توجد خواص أخرى هامة لتماثلات الزمرة بشكل عام و للتماثلات الداخلية للزمرة بشكل خاص. وأولى هذه الخواص نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٧-٦.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$ هو أن يكون $f(H)=H$ وذلك أياً كان $f\in Inn(G)$.

**البرهان.**

**لزوم الشرط.** لنفرض أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$، عندئذ $f=T_a$ حيث $a\in G$ ومنه أياً كان $h\in H$ فإن $f(h)=T_a(h)=aha^{-1}\in H$، وبالتالي $f(H)\subseteq H$. ليكن $k\in H$، عندئذ $k\in aHa^{-1}$ وبالتالي يوجد $k_0\in H$ بحيث

$$k=ak_0a^{-1}=T_a(k_0)=f(k_0)\in f(H)$$

أي أن $H\subseteq f(H)$. مما سبق نجد أن $f(H)=H$، وذلك أياً كان $f\in Inn(G)$.

**كفاية الشرط.** لنفرض أنه أياً كان $f\in Inn(G)$ فإن $f(H)=H$. ليكن $h\in H$، عندئذ أياً كان $g\in G$ فإن $ghg^{-1}=T_g(h)\in T_g(H)=H$ وهذا يبين لنا أن $gHg^{-1}\subseteq H$ وذلك أياً كان $g\in G$، أي أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$. ◊

نأتي الآن لدراسة نوع جديد من الزمر الجزئية وذلك بالاعتماد على زمرة التماثلات.

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. نقول عن الزمرة الجزئية $H$ أنها متميزة في $G$، إذا كان $f(H)=H$ وذلك أياً كان $f\in Aut(G)$.

يعد $G.Frobenius$ أول من أدخل مفهوم الزمرة المتميزة عام ١٨٩٥. من التعريف السابق وبالاعتماد على المبرهنة(٧-٦) نجد أن مفهوم الزمرة المتميزة ما هو



إلا تعميم لمفهوم الزمرة الناظمية، وهذا المفهوم يبين لنا أنه توجد علاقة هامة بين الزمر الجزئية لزمرة وبين زمرة التماثلات لهذه الزمرة. بعض خواص الزمرة المتميزة نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٧-٧.**

لتكن $G$ زمرة. عندئذ:

١- أية زمرة جزئية متميزة في $G$ تكون ناظمية في $G$.

٢- إذا كانت $H,K$ زمراً جزئية من $G$ بحيث $H\subseteq K$،عندئذ، إذا كانت $K$ متميزة في $G$ و $H$ متميزة في $K$ فإن $H$ تكون متميزة في $G$.

٣- إذا كانت $H,K$ زمرتين جزئيتين من $G$ بحيث $H\subseteq K$، عندئذ، إذا كانت $K$ ناظمية في $G$ و $H$ متميزة في $K$ فإن $H$ تكون ناظمية في $G$.

**البرهان.**

١ - ينتج مباشرة من المبرهنة (٧-٦).

٢ - بما أن $K$ متميزة في $G$، عندئذ $f(K)=K$ وذلك أياً كان $f\in Aut(G)$. كذلك بما أن $H$ متميزة في $K$، عندئذ $\varphi(H)=H$ وذلك أياً كان $\varphi\in Aut(K)$. ليكن $\Theta\in Aut(G)$، عندئذ فإن مقصور $\Theta$ على $K$ والذي سوف نرمز له $\Theta_K:K\to G$ هو تشاكل متباين، وبما أن $\Theta(K)=K$ نجد أن $\Theta_K:K\to K$ هو تماثل للزمرة $K$، أي أن $\Theta_K\in Aut(K)$، وهذا يبين لنا أن $\Theta(H)=\Theta_K(H)=H$ وذلك أياً كان $\Theta\in Aut(G)$، أي أن الزمرة $H$ تكون متميزة في $G$.

٣ - بما أن الزمرة $K$ ناظمية في $G$، فإن $f(K)=K$ وذلك أياً كان $f\in Inn(G)$. كذلك، بما أن $H$ متميزة في $K$ فإن $\varphi(H)=H$ وذلك أياً كان $\varphi\in Aut(K)$. ليكن $\Theta\in Inn(G)$ عندئذ فإن مقصور $\Theta$ على $K$ والذي سوف نرمز له $\Theta_K:K\to G$. هو تشاكل متباين، وحسب الفرض فإن $\Theta(K)=K$ نجد أن $\Theta_K:K\to K$ هو تماثل للزمرة $K$، أي أن $\Theta_K\in Aut(K)$، وحسب الفرض فإن $\Theta_K(H)=H$ وهذا يبين

لنا أن $H=\Theta_K(H)=\Theta(H)$ وذلك أياً كان $\Theta \in Inn(G)$، وحسب المبرهنة(٧-٦) فإن الزمرة $H$ تكون ناظمية في $G$. ه

**مبرهنة ٧-٨.**

لتكن $G$ و $K$ زمرة جزئية متميزة في $G$. عندئذ:

١ - أياً كان $\alpha \in Aut(G)$ فإن العلاقة $\overline{\alpha}: G/K \to G/K$ المعرفة بالشكل $\overline{\alpha}(gK)=\alpha(g)K$ وذلك أياً كان $gK\in G/K$ هو تماثل للزمرة $G/K$ أي أن $\overline{\alpha}\in Aut(G/K)$.

٢ - لتكن $H$ زمرة جزئية من الزمرة $G$ بحيث $K\subseteq H\subseteq G$. إذا كانت الزمرة $H/K$ متميزة في الزمرة $G/K$ فإن الزمرة $H$ تكون متميزة في الزمرة $G$.

**البرهان.**

١ - ليكن $\alpha\in Aut(G)$ ولنعرف العلاقة $\overline{\alpha}:G/K\to G/K$ بالشكل $\overline{\alpha}(gK)=\alpha(g)K$ وذلك أياً كان $gK\in G/K$. $\overline{\alpha}$ تطبيق لأنه أياً كان $g_1K, g_2K\in G/K$ بحيث $g_1K=g_2K$ فإن $(g_1g_2^{-1})K=K$ ومنه $g_1g_2^{-1}\in K$ وبما أن الزمرة $K$ زمرة متميزة في $G$ فإن $\alpha(g_1g_2^{-1})\in\alpha(K)=K$ أي أن

$$\alpha(g_1)\alpha(g_2^{-1})=\alpha(g_1)(\alpha(g_2))^{-1}\in K$$

ومنه $\alpha(g_1)K=\alpha(g_2)K$ وبالتالي $\overline{\alpha}(g_1K)=\overline{\alpha}(g_2K)$. كما أن $\overline{\alpha}$ تشاكل لأن

$$\overline{\alpha}(g_1K.g_2K)=\overline{\alpha}((g_1g_2)K)=\alpha(g_1g_2)K=(\alpha(g_1)\alpha(g_2))K=$$
$$=(\alpha(g_1)K)(\alpha(g_2)K)=\overline{\alpha}(g_1K)\overline{\alpha}(g_2K)$$

كما أن التطبيق $\overline{\alpha}$ متباين لأنه إذا كان $\overline{\alpha}(g_1K)=\overline{\alpha}(g_2K)$ فإن $\alpha(g_1)K=\alpha(g_2)K$ وبالتالي فإن $\alpha(g_1)(\alpha(g_2))^{-1}K=K$ ومنه $\alpha(g_1g_2^{-1})\in K=\alpha(K)$ وبالتالي يوجد $k\in K$ بحيث $\alpha(g_1g_2^{-1})=\alpha(k)$ وبما أن $\alpha$ تماثل فإن $g_1g_2^{-1}=k\in K$ وبالتالي $(g_1g_2^{-1})K=K$ وهكذا نجد أن $g_1K=g_2K$. كذلك $\overline{\alpha}$ غامر لأنه أياً كان $gK\in G/K$ فإن $g\in G=\alpha(G)$ لأن $\alpha$ تماثل ومنه يوجد $x\in G$ بحيث $g=\alpha(x)$. وبما أن $x\in G$ فإن $xK\in G/K$ وأن



$\overline{\alpha}(xK)=\alpha(x)K=gK$.

مما سبق نجد أن $\overline{\alpha}\in Aut(G/K)$.

٢ - لتكن $H$ زمرة جزئية من الزمرة $G$ بحيث $K\subseteq H\subseteq G$. وبما أن الزمرة $K$ متميزة في $G$ فإنه حسب المبرهنة (٧-٧) فإن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ وبالتالي فإن $K$ ناظمية في $H$. لنفرض أن الزمرة $H/K$ متميزة في $G/K$. وليكن $\alpha\in Aut(G)$ عندئذ حسب (١) فإن $\overline{\alpha}:G/K\to G/K$ حيث $\overline{\alpha}(gK)=\alpha(g)K$ وذلك أياً كان $gK\in G/K$. هو تماثل للزمرة $G/K$. أي أن $\overline{\alpha}\in Aut(G/K)$ وبما أن الزمرة $H/K$ متميزة في $G/K$ فإن $\overline{\alpha}(H/K)=H/K$. ليكن $h\in H$ عندئذ $hK\in H/K$ ومنه

$$\overline{\alpha}(hK)=\alpha(h)K\in H/K$$

و منه $\alpha(h)\in H$ أي أن $\alpha(H)\subseteq H$. وبما أن $\alpha\in Aut(G)$ فإن $\alpha^{-1}\in Aut(G)$ وبالتالي $\alpha^{-1}(H)\subseteq H$ ومنه $\alpha(\alpha^{-1}(H))\subseteq\alpha(H)$ أي أن $H\subseteq\alpha(H)$. مما سبق نجد أن $\alpha(H)=H$. وبالتالي الزمرة $H$ متميزة في الزمرة $G$. ه

**ملاحظة.**

إن عكس الطلب (٢) من المبرهنة السابقة غير صحيح.

**تمهيدية ٧-٩.**

لتكن $G$ و $K$ زمرة جزئية من $G$. الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة $K$ متميزة في $G$ هو أن يتحقق الشرط $\alpha(K)\subseteq K$ وذلك $\forall\alpha\in Aut(G)$.

**البرهان.**

**لزوم الشرط.** واضح.

**كفاية الشرط.** لنفرض أنه $\forall\alpha\in Aut(G)$ فإن $\alpha(K)\subseteq K$ وبما أن $\alpha^{-1}\in Aut(G)$ عندئذ $\alpha^{-1}(K)\subseteq K$ وبالتالي $K\subseteq\alpha(K)$ ومنه $\alpha(K)=K$ أي أن الزمرة $K$ متميزة في $G$. ه

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $K \neq \langle e \rangle$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. نقول إن $K$ زمرة جزئية ناظمية أصغرية في $G$ إذا لم توجد في $G$ زمر جزئية ناظمية $L$ في $G$ تحقق $\langle e \rangle \neq L \subset K$.

**تمهيدية ٧-١٠.**

لتكن $G$ زمرة و $K$ زمرة جزئية ناظمية أصغرية في $G$. عندئذ إما $K$ تبديلية أو $Z(K) = \langle e \rangle$.

**البرهان.**

إذا كان $Z(K) = \langle e \rangle$ يتم المطلوب.

لنفرض أن $Z(K) \neq \langle e \rangle$ وحسب التمرين المحلول (١) فإن الزمرة $Z(K)$ متميزة في $K$ وبما أن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ وحسب المبرهنة (٧-٧) فإن الزمرة $Z(K)$ تكون ناظمية في $G$ وبما أن $\langle e \rangle \neq Z(K) \subseteq K$ نجد أن $Z(K) = K$ أي أن الزمرة $K$ تبديلية. ◦

**مبرهنة ٧-١١.**

ليكن $n$ عدداً صحيحاً موجباً و $G, H$ زمرتين تبديليتين. عندئذ

١ – المجموعة $G^n = \{g^n : g \in G\}$ زمرة جزئية من الزمرة $G$.

٢ – إذا كانت $G \approx H$ عندئذ $G^n \approx H^n$ و $\dfrac{G}{G^n} \approx \dfrac{H}{H^n}$.

**البرهان.**

١ – إن $e = e^n \in G^n$. ليكن $x, y \in G^n$ عندئذ يوجد $g_1, g_2 \in G$ بحيث $x = g_1^n, y = g_2^n$ ومنه

$$x.y^{-1} = g_1^n.g_2^{-n} = (g_1.g_2^{-1})^n \in G^n$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة $G^n$ زمرة جزئية من الزمرة $G$.

٢ – لنفرض أن $f : G \to H$ تماثل ولنعرف العلاقة $\varphi : G^n \to H^n$ بالشكل

$$\forall g^n \in G^n; \quad \varphi(g^n) = (f(g))^n$$



فنجد أن $\varphi$ تطبيق لأنه أياً كان $g_1^n, g_2^n \in G^n$ بحيث $g_1^n = g_2^n$ فإن $g_1^n, g_2^n \in G$ ومنه

$$(f(g_1))^n = f(g_1^n) = f(g_2^n) = (f(g_2))^n$$

وبالتالي فإن $\varphi(g_1^n) = \varphi(g_2^n)$. كما أن $\varphi$ تشاكل لأن

$$\varphi(g_1^n.g_2^n) = \varphi((g_1.g_2)^n) = (f(g_1.g_2))^n = (f(g_1).f(g_2))^n =$$
$$= (f(g_1))^n.(f(g_2))^n = \varphi(g_1^n)\varphi(g_2^n)$$

كما أن $\varphi$ متباين لأنه إذا كان $\varphi(g_1^n) = \varphi(g_2^n)$ عندئذ $(f(g_1))^n = (f(g_2))^n$ ومنه $f(g_1^n) = f(g_2^n)$ وبما أن $f$ تماثل نجد أن $g_1^n = g_2^n$. وهو أيضا غامر، لأنه إذا كان $h^n \in H^n$ فإن $h \in H$ وبما أن $f$ غامر فإنه يوجد $g \in G$ بحيث $f(g) = h$. من جهة أخرى، $g^n \in G^n$ وأن $\varphi(g^n) = (f(g))^n = h^n$. مما سبق نجد أن $\varphi$ تماثل.

بشكل مشابه نجد أن $\dfrac{H}{H^n} \approx \dfrac{G}{G^n}$. ◦

# تمـــاريـن محـلـولـة ( ٧ )

١- لتكن $G$ زمرة. أثبت أن الزمرة الجزئية $Z(G)$ متميزة في $G$.

**الحـــل.**

لنبرهن أن $f(Z(G))=Z(G)$ وذلك أياً كان $f\in Aut(G)$. ليكن $a\in Z(G)$ ولنبرهن أن $f(a)\in Z(G)$. ليكن $x\in G$، بما أن $f(G)=G$، فإنه يوجد $y\in G$ بحيث $x=f(y)$ ومنه

$$xf(a)=f(y)f(a)=f(ya)=f(ay)=f(a)f(y)=f(a)x$$

وبالتالي $f(a)\in Z(G)$، أي أن $f(Z(G))\subseteq Z(G)$. مما سبق، وبما أن $f^{-1}\in Aut(G)$ نجد أن $f^{-1}(Z(G))\subseteq Z(G)$ ومنه $Z(G)\subseteq f(Z(G))$. وهذا يبين لنا أن $f(Z(G))=Z(G)$، أي أن الزمرة $Z(G)$ متميزة في $G$. ○

٢- لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية في $G$. عندئذ:

أ- المجموعة $N(H)=\{x:x\in G,\quad xHx^{-1}=H\}$ هي زمرة جزئية في $G$ تسمى مناظم الزمرة الجزئية $H$ في $G$.

ب- المجموعة $C(H)=\{x:x\in G,\quad xhx^{-1}=h;\quad \forall h\in H\}$ هي زمرة جزئية في $G$ تسمى ممركز الزمرة الجزئية $H$ في $G$.

ت- $N(H)/C(H)$ تماثل زمرة جزئية من الزمرة $Aut(H)$.

**الحـل.**

أ – واضح أن $N(H)$ مجموعة جزئية من $G$ وغير خالية. ليكن $x,y\in N(H)$ عندئذ $(xy^{-1})H(xy^{-1})^{-1}=x(y^{-1}Hy)x^{-1}=xHx^{-1}=H$ أي أن $xy^{-1}\in N(H)$.

ب – راجع التمرين المحلول (٢-٣).

ت – لنعرف العلاقة $f:N(H)\to Aut(H)$ بالشكل التالي: أياً كان $g\in N(H)$ فإن $f(g)=T_g$. إن $f$ تطبيق، لأنه أياً كان $g_1,g_2\in N(H)$ بحيث $g_1=g_2$، عندئذ



$\forall h\in H$ فإن $g_1hg_1^{-1}=g_2hg_2^{-1}$ ومنه $T_{g_1}=T_{g_2}$، أي أن $f(g_1)=f(g_2)$. كذلك $f$ تشاكل، لأنه إذا كان $f(g_1g_2)=T_{g_1g_2}$ ومنه فإن

$$T_{g_1g_2}(h)=(g_1g_2)h(g_1g_2)^{-1}=g_1(g_2hg_2^{-1})g_1^{-1}=T_{g_1}(T_{g_2}(h))=T_{g_1}T_{g_2}(h)$$

وذلك $\forall h\in H$ أي أن $f(g_1g_2)=T_{g_1g_2}=T_{g_1}T_{g_2}=f(g_1)f(g_2)$. لنفرض أن $\operatorname{Im} f=K$، عندئذ حسب الخاصة (٥) من المبرهنة(٦-١) فإن $K$ زمرة جزئية من الزمرة $Aut(H)$ وأن $f:N(H)\to K$ هو تشاكل زمري غامر. لنبرهن على أن $Kerf=C(H)$. ليكن $g\in Kerf$ عندئذ $g\in N(H)$ وأن $gHg^{-1}=H$. كذلك فإن $f(g)=T_g$ وأن $f(g)=T_e$، ومنه أياً كان $h\in H$ فإن $T_g(h)=T_e(h)$ وبالتالي $ghg^{-1}=h$ أي أن $g\in C(H)$ ومنه $Kerf\subseteq C(H)$. بشكل مشابه يبرهن على الاحتواء المعاكس. وحسب مبرهنة التماثل الزمري الأولى فإن $N(H)/Kerf=N(H)/C(H)\approx K$. ○

٣ – لتكن $G$ زمرة. عندئذ

١ – إذا كانت الزمرة $G$ دوارة فإن الزمرة $Aut(G)$ تبديلية.

٢ – إذا كانت $(G:1)=p$ حيث $P$ عدد أولي عندئذ $(Aut(G):1)=p-1$.

**الحـل.**

١ – لنفرض أن $G=\langle g\rangle$ حيث $g\in G$ وليكن $\alpha,\beta\in Aut(G)$. بما أن $\alpha(g),\beta(g)\in G=\langle g\rangle$ لنفرض أن $\alpha(g)=g^r,\beta(g)=g^s$ حيث $r,s\in Z$ ومنه

$$(\alpha\circ\beta)(g)=\alpha(\beta(g))=\alpha(g^s)=(\alpha(g))^s=(g^r)^s=g^{r.s}=g^{s.r}=(g^s)^r=$$
$$=(\beta(g))^r=\beta(g^r)=\beta(\alpha(g))=\beta\circ\alpha(g)$$

ومنه نجد أن $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$.

٢ – لنفرض أن $(G:1)=p$ عندئذ الزمرة $G$ دوارة. لنفرض أن $G=\langle g\rangle$. أياً كان $r\in Z$ فإن العلاقة $\alpha:G\to G$ المعرفة بالشكل $\alpha(g)=g^r$ هي تماثل للزمرة $G$ (تأكد من ذلك). وبما أن $o(g)=p$ فإن $o(g^r)=o(g)=p$، ومنه نجد أنه توجد $p-1$ إمكانية للعنصر $g^r$ بهذا الشكل نجد أن $(Aut(G):1)=p-1$. ○

٤ – لتكن $G,H$ زمر تبديلية وأن $\zeta(G),\zeta(H)$ زمرتا الفتل لكل من الزمرتين $G,H$ على الترتيب ( راجع التمرين المحلول (٣–٥) ). إذا كان $G\approx H$، عندئذ:

١ – $\zeta(G)\approx\zeta(H)$.

٢ – $\frac{G}{\zeta(G)}\approx\frac{H}{\zeta(H)}$.

**الحل.**

لنفرض أن $G\approx H$ ولنرمز لهذا التماثل بالرمز $\varphi:G\to H$.

١ – لنفرض أن $f:\zeta(G)\to H$ هو مقصور $\varphi$ على الزمرة الجزئية $\zeta(G)$. واضح أن $f$ هو تشاكل متباين وأنه أياً كان $a\in\zeta(G)$ فإن $f(a)=\varphi(a)$. ليكن $x\in\zeta(G)$ عندئذ يوجد $n\in N^*$ بحيث $x^n=e$ ومنه $(\varphi(x))^n=\varphi(x^n)=\varphi(e)=e$ وبالتالي $\varphi(x)\in\zeta(H)$ وهكذا نجد أنه

$$\forall x\in\zeta(G);\quad f(x)=\varphi(x)\in\zeta(H)$$

وبالتالي $f(\zeta(G))\subseteq\zeta(H)$. وهذا يبين لنا أن $f:\zeta(G)\to\zeta(H)$ تشاكل متباين. لنبرهن على أنه غامر. ليكن $y\in\zeta(H)\subseteq H$ وبما أن $\varphi$ غامر يوجد $z\in G$ بحيث $\varphi(z)=y$. من جهة أخرى، بما أن $y\in\zeta(H)$ يوجد $m\in N^*$ بحيث $\varphi(z^m)=(\varphi(z))^m=y^m=e$ أي أن $\varphi(z^m)\in Ker\varphi=\langle e\rangle$ لأن $\varphi$ متباين وبالتالي $z^m=e$ أي أن $z\in\zeta(G)$ وأن $f(z)=\varphi(z)=y$ مما سبق نجد أن $\zeta(G)\approx\zeta(H)$.

٢ – لنعرف العلاقة $\overline{\varphi}:\frac{G}{\zeta(G)}\to\frac{H}{\zeta(H)}$ بالشكل $\overline{\varphi}(x\zeta(G))=\varphi(x)\zeta(H)$ وذلك أياً كان $x\zeta(G)\in\frac{G}{\zeta(G)}$. إن $\varphi$ تطبيق لأنه أياً كان $x\zeta(G),y\zeta(G)\in\frac{G}{\zeta(G)}$ بحيث $x\zeta(G)=y\zeta(G)$ فإن $y\in x\zeta(G)$ وبالتالي يوجد $a\in\zeta(G)$ بحيث $y=xa$ ومنه $\varphi(y)=\varphi(xa)=\varphi(x)\varphi(a)$ وبما أن $a\in\zeta(G)$ وحسب (١) فإن $\varphi(a)\in\varphi(\zeta(G))=\varphi(\zeta(H))$ وبالتالي $\varphi(y)=\varphi(x)\varphi(a)\in\varphi(x)\zeta(H)$ وبما أن



$\varphi(y)\in\varphi(y)\zeta(H)$ نجد أن $\varphi(x)\zeta(H)=\varphi(y)\zeta(H)$ أي أن $\overline{\varphi}(x\zeta(G))=\overline{\varphi}(y\zeta(G))$ كما أن $\varphi$ تشاكل لأن

$$\overline{\varphi}(x\zeta(G).y\zeta(G))=\overline{\varphi}(xy.\zeta(G))=\varphi(xy)\zeta(H)=\varphi(x)\zeta(H).\varphi(y)\zeta(H)=$$
$$=\overline{\varphi}(x\zeta(G)).\overline{\varphi}(y\zeta(G))$$

بالإضافة لذلك إن $\varphi$ متباين لأنه إذا كان $\overline{\varphi}(x\zeta(G))=\overline{\varphi}(y\zeta(G))$ فإن $\varphi(x)\zeta(H)=\varphi(y)\zeta(H)$ ومنه $\varphi(y)\in\varphi(x)\zeta(H)$ وبالتالي يوجد $b\in\zeta(H)$ بحيث $\varphi(y)=\varphi(x)b$ وحسب (١) بما أن $\varphi(\zeta(G))=\zeta(H)$ يوجد $b_1\in\zeta(G)$ بحيث $\varphi(b_1)=b$ ومنه $\varphi(y)=\varphi(x)\varphi(b_1)=\varphi(xb_1)$ وبما أن $\varphi$ متباين فإن $y=xb_1\in x\zeta(G)$ وبما أن $y\in y\zeta(G)$ نجد أن $x\zeta(G)=y\zeta(G)$. كما أن $\overline{\varphi}$ غامر (تأكد من ذلك)، مما سبق نجد $\overline{\varphi}$ تماثل. ◊

## تمـــــاريــن ( ٧ )

١ – أوجد كلاً من $Aut(Z_{30})$ و $Aut(Z_6)$.

٢ – لتكن $R^+$ زمرة الأعداد الحقيقة الموجبة بالنسبة إلى الضرب. أثبت أن التطبيق $\varphi(x)=\sqrt{x}$ هو تماثل للزمرة $R^+$.

٣ – لتكن $G$ زمرة. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة $G$ تبديلية هو أن يكون $(Inn(G):1)=1$.

٤ – أثبت أن التطبيق $\varphi: Z\oplus Z\to Z$ المعرف بالشكل

$$\forall (a,b)\in Z\oplus Z,\quad \varphi(a,b)=a-b$$

هو تشاكل زمري، ثم عين نواة هذا التشاكل.

٥ – لتكن $G$ زمرة دوارة منتهية. أثبت أن كل زمرة جزئية من $G$ هي زمرة متميزة في $G$.

٦ – لتكن $G$ زمرة غير تبديلية. أثبت أن الزمرة $Aut(G)$ ليست دوارة.

٧ – لتكن $G$ زمرة و $A$ زمرة جزئية متميزة في $G$، ولتكن $B$ زمرة جزئية من $G$ تحوي $A$. إذا كانت الزمرة $\frac{B}{A}$ متميزة في $\frac{G}{A}$ فإن الزمرة $B$ تكون متميزة في $G$.

٨ – لتكن $G$ زمرة و $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. ولتكن $A,H$ زمر جزئية من $G$ بحيث $K\subseteq A, K\subseteq H$. إذا كانت الزمرة $\frac{A}{K}$ متميزة في $\frac{H}{K}$ وكانت الزمرة $H$ ناظمية في $G$ فإن الزمرة $A$ تكون ناظمية في $G$.

٩ – لتكن $G$ زمرة. إذا كانت $H$ زمرة جزئية متميزة في $G$ فإن الزمرة $C(H)$ تكون متميزة في $G$.

١٠ – لتكن $G$ زمرة تبديلية و $H$ زمرة جزئية من $G$. أثبت أن:

١ – $\zeta(H)=H\cap\zeta(G)$.

٢ – $\frac{\zeta(G)}{\zeta(H)}\approx\frac{H\zeta(G)}{H}\subseteq\zeta(\frac{G}{H})$.

حيث $\zeta(G)$ هي زمرة الفتل للزمرة $G$.



# الفصـــل الثـــامــن

## الجـــداء و المجمـــوع المباشران لـــزمـــر

في هذا الفصل سوف نعالج طريقتين للتعامل مع الزمر، الأولى هي كيفية تركيب مجموعة من الزمر للحصول على زمرة أكبر، والثانية هي كيفية تجزئة زمرة للحصول على زمر أصغر منها. وهذه الطرق سوف تكون ضرورية لنا في دراستنا المقبلة للزمر التبديلية المنتهية.

### ٨–١. الجـــداء المبـــاشر للزمـــر.

**تعريـــف.**

لتكن $G_1,G_2,\cdots,G_n$ مجموعة منتهية من الزمر. يعرف الجداء المباشر(الخارجي) للزمر السابقة على أنه المجموعة:

$$\{(g_1,g_2,\cdots,g_n),\quad g_i\in G_i;\quad 1\le i\le n\}$$

والذي سوف نرمز له $G_1\oplus G_2\oplus\cdots\oplus G_n$. أي أن:

$$G_1\oplus G_2\oplus\cdots\oplus G_n=\{(g_1,g_2,\cdots,g_n),\quad g_i\in G_i;\quad 1\le i\le n\}$$

**تمهيديـــة ٨–١–١.**

لتكن $G_1,G_2,\cdots,G_n$ مجموعة منتهية من الزمر. إن الجداء المباشر

$$G_1\oplus G_2\oplus\cdots\oplus G_n=\{(g_1,g_2,\cdots,g_n),\quad g_i\in G_i;\quad 1\le i\le n\}$$

هو زمرة بالنسبة إلى العملية (٠) المعرفة كما يلي:

$$\forall (a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in G_1\oplus G_2\oplus\cdots\oplus G_n \text{ فإن}$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n).(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_nb_n)$$

يشكل زمرة الحيادي فيها هو $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ حيث $e_i$ هو حيادي الزمرة $G_i$ وذلك لأجل كل $1\le i\le n$، ومقلوب العنصر $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ هو

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{-1}=(a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots,a_n^{-1})$.

**البرهـــان.**

سوف نتركه للقارئ.

**مثـــال.**

لنأخذ الزمرتين

$$U(10)=\{1,3,7,9\},\qquad U(8)=\{1,3,5,7\}$$

الجداء المباشر للزمرتين $U(10)$ و $U(8)$ هو

$$U(8)\oplus U(10)=\{(1,1),(1,3),(1,7),(1,9),(3,1),(3,3),(3,7),$$
$$(3,9),(5,1),(5,3),(5,7),(5,9),(7,1),(7,3),(7,7),(7,9)\}$$

كما أن

$$(3,7).(7,9)=(3.7\bmod\!-8, 7.9\bmod\!-10)=(5,3)$$

كذلك

$$(3,9).(3,3)=(3.3\bmod\!-8, 9.3\bmod\!-10)=(1,7)$$

**مثـــال.**

لنأخذ الزمرتين

$$Z_2=\{0,1\},\qquad Z_3=\{0,1,2\}$$

فنجد أن الجداء المباشر للزمرتين $Z_2$ و $Z_3$ هو

$$Z_2\oplus Z_3=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$$

كما أن الزمرة $Z_2\oplus Z_3$ هي زمرة دوارة مرتبتها 6، ومولدة بالعنصر $(1,1)$، لأن

$$1.(1,1)=(1,1),\qquad 2.(1,1)=(1,1).(1,1)=(1+1,1+1)=(0,2)$$
$$3.(1,1)=(1,1).(1,1).(1,1)=(1+1+1,1+1+1)=(1,0)$$
$$4.(1,1)=(0,1),\qquad 5.(1,1)=(1,2),\qquad 6.(1,1)=(0,0)$$

مما سبق نجد أن $Z_2\oplus Z_3\approx Z_6$.

نأتي الآن إلى دراسة خواص الجداء المباشر لزمر، وذلك من خلال المبرهنة التالية:



**مبرهنـــة ٨-١-**

لتكن $G_1,G_2$ زمرتين وليكن $e_1,e_2$ حيادياً كل من $G_1,G_2$ على الترتيب. ولنأخذ زمرتي الجداء المباشر $G_1\oplus G_2$ و $G_2\oplus G_1$. القضايا التالية صحيحة:

١- $G_1\oplus G_2\approx G_2\oplus G_1$.

٢- $Z(G_1\oplus G_2)=Z(G_1)\oplus Z(G_2)$.

٣- كلاً من $G_1\oplus\langle e_2\rangle$ و $\langle e_1\rangle\oplus G_2$ زمرة جزئية من الزمرة $G_1\oplus G_2$.

٤- $G_1\approx G_1\oplus\langle e_2\rangle$، $G_2\approx\langle e_1\rangle\oplus G_2$.

٥- الزمرة $G_1\oplus G_2$ تبديلية عندما وفقط عندما، تكون كل من الزمرتين $G_1$ و $G_2$ تبديلية.

**البرهـــان.**

سوف نقوم بالبرهان على ١ و ٢ فقط ونترك البقية للقارئ.

١ – لنعرف العلاقة $f:G_1\oplus G_2\to G_2\oplus G_1$ بالشكل التالي: أياً كان $(x,y)\in G_1\oplus G_2$ فإن $f((x,y))=(y,x)$. فنجد أن العلاقة $f$ هي تطبيق متباين، لأنه أياً كان $(x,y),(x_1,y_1)\in G_1\oplus G_2$ فإن

$$(x,y)=(x_1,y_1)\Leftrightarrow x=x_1, y=y_1\Leftrightarrow$$
$$(y,x)=(y_1,x_1)\Leftrightarrow f((x,y))=f((x_1,y_1))$$

كذلك، واضح أن التطبيق f غامر. لنبرهن على أن التطبيق $f$ هو تشاكل

$$f[(x,y)(x_1,y_1)]=f((xx_1,yy_1))=(yy_1,xx_1)=$$
$$=(y,x)(y_1,x_1)=f((x,y))f((x_1,y_1))$$

وهذا يبين لنا أن $G_1\oplus G_2\approx G_2\oplus G_1$.

٢ – ليكن $(a,b)\in Z(G_1\oplus G_2)$ عندئذ، أياً كان $x\in G_1$ و أياً كان $y\in G_2$ فإن $(x,y)\in G_1\oplus G_2$ ومنه $(a,b)(x,y)=(x,y)(a,b)$ وبالتالي فإن $(ax,by)=(xa,yb)$ أي أن $by=yb$ و $ax=xa$، وهذا يبين لنا أن $(a,b)\in Z(G_1)\oplus Z(G_2)$.

وهكذا نجد أن $Z(G_1 \oplus G_2) \subseteq Z(G_1) \oplus Z(G_2)$. ليكن $(a,b) \in Z(G_1) \oplus Z(G_2)$ عندئذ، أياً كان $(x,y) \in G_1 \oplus G_2$ فإن

$$(x,y)(a,b) = (xa,yb) = (ax,by) = (a,b)(x,y)$$

أي أن $(a,b) \in Z(G_1 \oplus G_2)$. ومنه $Z(G_1) \oplus Z(G_2) \subseteq Z(G_1 \oplus G_2)$. مما سبق نجد أن

$$Z(G_1 \oplus G_2) = Z(G_1) \oplus Z(G_2).$$ ٥

خاصة أخرى للجداء المباشر نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٨-١-٣.**

لتكن $G_1,G_2$ و $H_1,H_2$ زمر اختيارية. إذا كان $G_1 \approx H_1$ و $G_2 \approx H_2$، عندئذ فإن $G_1 \oplus G_2 \approx H_1 \oplus H_2$.

**البرهان.**

لنفرض أن $f_1 : G_1 \to H_1$ و $f_2 : G_2 \to H_2$ هما التماثلان المفروضان. ولنعرف العلاقة $f : G_1 \oplus G_2 \to H_1 \oplus H_2$ بالشكل التالي: أياً كان $(x,y) \in G_1 \oplus G_2$ فإن $f((x,y)) = (f_1(x), f_2(y))$ فنجد أن $f$ تماثل. وسوف نترك إثبات ذلك للقارئ. ٥

لنورد من خلال المبرهنة التالية طريقة مبسطة لحساب مرتبة عنصر من الجداء المباشر لزمر، وذلك بالاعتماد على مراتب المركبات.

**مبرهنة ٨-١-٤.**

مرتبة كل عنصر من الجداء المباشر لعدد منته من الزمر المنتهية يساوي المضاعف المشترك الأصغر لمراتب المركبات.

**البرهان.**

لتكن $G_i$ زمرة منتهية، حيث $1 \le i \le n$. وليكن

$$(g_1, g_2, \cdots, g_n) \in G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$$

ولنبرهن أن

$$o((g_1, g_2, \cdots, g_n)) = lcm(o(g_1), o(g_2), \cdots, o(g_n))$$



للسهولة ودون المس بالعمومية، سوف نبرهن هذه الحقيقة من أجل $n = 2$. بمعنى آخر لنبرهن على أن

$$o((g_1, g_2)) = lcm(o(g_1), o(g_2))$$

لنفرض أن $o((g_1, g_2)) = t$. عندئذ $(g_1, g_2)^t = (g_1^t, g_2^t) = (e_1, e_2)$. من جهة أخرى، لنفرض أن $s = lcm(o(g_1), o(g_2))$ عندئذ

$$(g_1, g_2)^s = (g_1^s, g_2^s) = (e_1, e_2)$$

حيث كل من $e_1, e_2$ هو حيادي الزمرة $G_1, G_2$ على الترتيب. مما سبق وحسب المبرهنة (٣-١-٧) نجد أن $t$ يقسم $s$ أي أن $t \le s$. بفرض أن $o(g_1) = m_1$, $o(g_2) = m_2$ عندئذ فإن كلاً من $m_1, m_2$ يقسم $t$. ومنه فإن $t$ مضاعف للعددين $m_1, m_2$، وهذا يبين لنا أن $t \ge s$ أي أن $t = s$. ومنه فإن $o((g_1, g_2)) = lcm(o(g_1), o(g_2))$. ٥

نأتي الآن إلى المبرهنة التالية، والتي تعطينا الشرط اللازم والكافي كي يكون الجداء المباشر لزمر دوارة منتهية هو زمرة دوارة.

**مبرهنة ٨-١-٥.**

لتكن $H, K$ زمرتين دوارتين منتهيتين. الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة $K \oplus H$ دوارة هو أن تكون مرتبة كل من $H, K$ عددين أوليين فيما بينهما.

**البرهان.**

لنفرض أن $K = \langle k \rangle$, $H = \langle h \rangle$ حيث $k \in K$, $h \in H$. ولنفرض أيضاً أن $(H:1) = n, (K:1) = m$. واضح في هذه الحالة أن $(K \oplus H : 1) = mn$.

**لزوم الشرط.** لنفرض أن الزمرة $K \oplus H$ دوارة. ولنفرض جدلاً أن $\gcd(m,n) = t > 1$ عندئذ $k^{\frac{m}{t}} \in K$ ومرتبته $t$ و $h^{\frac{n}{t}} \in H$ مرتبته $t$ أيضا. ومنه كل من الزمرتين $\langle (k^{\frac{m}{t}}, e) \rangle, \langle (e, h^{\frac{n}{t}}) \rangle$ دوارة و لهما المرتبة نفسها وهي $t$ وهاتان الزمرتان مختلفتان، وهذا يناقض المبرهنة (٣-١-٩) إذن $t = 1$.

**كفاية الشرط.** لنفرض أن $\gcd(m,n)=1$ عندئذ حسب المبرهنة (٨-١-٤) فإن

$$o((k,h)) = lcm(o(k),o(h)) = lcm(m,n) = mn = (K\oplus H:1)$$

ومنه نجد أن العنصر $(k,h)$ هو مولد للزمرة $K\oplus H$ وبالتالي تكون الزمرة $K\oplus H$ دوارة. ₀

يمكن تعميم المبرهنة (٨-١-٥) لأجل أي عدد منته من الزمر الدوارة المنتهية وذلك من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ٨-١-٦.**

لتكن $G_i$ زمرة دوارة منتهية، حيث $1\le i\le n$. الشرط اللازم والكافي كي تكون زمرة الجداء المباشر $G_1\oplus G_2\oplus\cdots\oplus G_n$ دوارة هو أن تكون $(G_i:1)$، $(G_j:1)$ أعداداً أولية فيما بينها وذلك أياً كان $i\ne j$، $1\le i,j\le n$.

**البرهان.**

ينتج بشكل مباشر من المبرهنة الأخيرة، ولذلك سوف نتركه للقارئ. ₀

بما أن أي زمرتين دوارتين منتهيتين و لهما المرتبة نفسها متماثلتين وأن الزمرة $Z_n$ دوارة ومنتهية وذلك أياً كان $n>1$، وبالاعتماد على المبرهنة (٨-١-٦) يمكننا صياغة النتيجة التالية:

**نتيجة.**

ليكن $m>1$ عدد صحيح يحقق $m=n_1.n_2.\cdots.n_t$. عندئذ

$$Z_m \approx Z_{n_1}\oplus Z_{n_2}\oplus\cdots\oplus Z_{n_t}$$

عندما وفقط عندما، تكون الأعداد $n_i,n_j$ أولية فيما بينها، وذلك أياً كان $i\ne j$، $1\le i,j\le n$. ₀

بالاعتماد على ما سبق نورد المثال التالي.

**مثال.**

بما أن العددين 2,3 أوليان فيما بينهما، فإن $Z_2\oplus Z_3\approx Z_6$. كذلك بما أن العددين 5,6 أوليان فيما بينهما، فإن $Z_5\oplus Z_6\approx Z_{30}$، ومنه

$$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_5 \approx Z_2\oplus Z_6\oplus Z_5\approx Z_2\oplus Z_{30}.$$

$$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_5\approx Z_2\oplus Z_6\oplus Z_5\approx Z_2\oplus Z_3\oplus Z_2\oplus Z_5\approx$$
$$\approx Z_2\oplus Z_3\oplus Z_{10}\approx Z_6\oplus Z_{10}$$

بينما

$$Z_2\oplus Z_{30}\not\approx Z_{60}.$$

لنأت الآن لدراسة الجداء المباشر للزمرة $U(n)$ وخواصه.

**مبرهنة ٨-١-٧.**

لتكن $s,t$ أعداداً صحيحة موجبة بحيث $\gcd(s,t)=1$. عندئذ

١- $U(s.t)\approx U(s)\oplus U(t)$.

٢- $U_s(s.t)\approx U(t)$.

٣- $U_t(s.t)\approx U(s)$.

**البرهان.**

١ – لنعرف العلاقة $f:U(s.t)\to U(s)\oplus U(t)$ بالشكل التالي: أياً كان $k\in U(s.t)$ فإن $f(k)=(k\,\text{mod}-s, k\,\text{mod}-t)$ فنجد أن العلاقة $f$ تطبيق، لأنه أياً كان $k_1,k_2\in U(s.t)$ بحيث $k_1=k_2$ فإن

$$k_1\,\text{mod}-s = k_2\,\text{mod}-s,\quad k_1\,\text{mod}-t = k_2\,\text{mod}-t$$

ومنه $(k_1\,\text{mod}-s, k_1\,\text{mod}-t) = (k_2\,\text{mod}-s, k_2\,\text{mod}-t)$ وهذا يبين لنا أن $f(k_1)=f(k_2)$. كذلك $f$ متباين، لأنه إذا كان $f(k_1)=f(k_2)$ فإن

$$(k_1\,\text{mod}-s, k_1\,\text{mod}-t) = (k_2\,\text{mod}-s, k_2\,\text{mod}-t)$$

أي أن

$$k_1\,\text{mod}-s = k_2\,\text{mod}-s,\quad k_1\,\text{mod}-t = k_2\,\text{mod}-t$$

وبما أن $\gcd(s,t)=1$ وحسب المبرهنة (١-٦-٤) نجد أن

$$k_1\,\text{mod}-(st) = k_2\,\text{mod}-(st)$$

وبما أن $k_1,k_2\in U(s.t)$ فإن

$$k_1 = k_1\,\text{mod}-(st) = k_2\,\text{mod}-(st) = k_2$$

كما أن $f$ تشاكل لأن

$$f(k_1k_2) = (k_1k_2 \bmod{-} s, k_1k_2 \bmod{-} t) =$$
$$= (k_1 \bmod{-} s, k_1 \bmod{-} t)(k_2 \bmod{-} s, k_2 \bmod{-} t) = f(k_1)f(k_2)$$

وكذلك $f$ غامر، لأنه أياً كان $(a,b) \in U(s) \oplus U(t)$ فإن $ab \in U(s) \oplus U(t)$، ومنه

$$f(ab) = (ab \bmod{-} s, ab \bmod{-} t) = (a,b)$$

مما سبق نجد أن $f$ تماثل.

٢ – نعلم أنه إذا كان $n > 1$ عدداً صحيحاً و $k$ قاسماً للعدد $n$، فإن

$$U_k(n) = \{x : x \in U(n), \quad x \equiv 1 \bmod{-} k\}.$$

لنعرف العلاقة $\varphi : U_s(s.t) \to U(t)$ بالشكل التالي: أياً كان $x \in U_s(s.t)$ فإن $\varphi(x) = x \bmod{-} t$. فنجد أن العلاقة $\varphi$ تطبيق، لأنه أياً كان $x, y \in U_s(s.t)$ بحيث $x = y$ فإن $x \bmod{-} t = y \bmod{-} t$ ومنه $\varphi(x) = \varphi(y)$. كذلك فإن $\varphi$ متباين، لأنه إذا كان $\varphi(x) = \varphi(y)$ فإن $x \bmod{-} t = y \bmod{-} t$ وحسب المبرهنة (١−٦−٤) فإن

$$x = x \bmod{-}(st) = y \bmod{-}(st) = y$$

كما أن $\varphi$ تشاكل لأن

$$\varphi(xy) = xy \bmod{-} t = (x \bmod{-} t)(y \bmod{-} t) = \varphi(x)\varphi(y)$$

كذلك $\varphi$ غامر.

٣ – يبرهن بشكل مشابه. ∘

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الهامة التالية:

**نتيجة.**

ليكن $m > 1$ عدداً صحيحاً يحقق $m = n_1.n_2.n_3.\cdots.n_k$ حيث $\gcd(n_i, n_j) = 1$ وذلك من أجل $i \neq j$، $1 \leq i, j \leq k$. عندئذ:

$$U(m) \approx U(n_1) \oplus U(n_2) \oplus U(n_3) \oplus \cdots \oplus U(n_k). \circ$$

**مثال.**

لدينا $105 = 7.15, 105 = 5.21$. وبما أن $\gcd(7,15) = 1, \gcd(5,21) = 1$. فإن

$$U(105) \approx U(7) \oplus U(15), U(105) \approx U(5) \oplus U(21)$$



$$U(105) \approx U(5) \oplus U(3) \oplus U(7)$$

بالإضافة لذلك فإن

$$U(7) \approx U_{15}(105) = \{1,16,31,46,61,76\}$$
$$U(5) \approx U_{21}(105) = \{1,22,43,64\}$$
$$U(15) \approx U_{7}(105) = \{1,8,22,29,43,64,71,92\}$$
$$U(3) \approx U_{35}(105) = \{1,71\}$$
$$U(21) \approx U_{5}(105) = \{1,11,16,26,31,41,46,61,71,76,86,101\}$$

**مبرهنة ٨−١−٨.**

لتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $G_1$ و $H$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $G_2$. عندئذ $H \oplus K$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $G = G_1 \oplus G_2$.

**البرهان.**

واضح أن $H \oplus K$ زمرة جزئية من الزمرة $G = G_1 \oplus G_2$. لنبرهن على أنه

$$\forall g \in G; \quad g(H \oplus K)g^{-1} \subseteq H \oplus K$$

ليكن $(x,y) \in g(H \oplus K)g^{-1}$ عندئذ يوجد $(h,k) \in H \oplus K$ بحيث $(x,y) = g(h,k)g^{-1}$ وبما أن $g \in G = G_1 \oplus G_2$ فإن $g = (g_1, g_2)$ حيث $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ ومنه

$$(x,y) = (g_1,g_2)(h,k)(g_1,g_2)^{-1} = (g_1,g_2)(h,k)(g_1^{-1},g_2^{-1}) =$$
$$= (g_1hg_1^{-1}, g_2kg_2^{-1}) \in H \oplus K$$

وذلك لأن الزمرة $K$ ناظمية في الزمرة $G_1$ و $H$ ناظمية في الزمرة $G_2$. مما سبق نجد أن الزمرة $H \oplus K$ زمرة جزئية من الزمرة $G = G_1 \oplus G_2$. ∘

## ٨−٢. المجموع المباشر لزمر.

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة ولتكن $H_1, H_2, H_3, \cdots, H_n$ مجموعة من الزمر الجزئية الناظمية من الزمرة $G$. نقول عن الزمرة $G$ إنها مجموع مباشر للزمر $H_i$ حيث $1 \leq i \leq n$، ونكتب $G = H_1 \times H_2 \times H_3 \times \cdots \times H_n$ إذا تحقق:

١- $G = H_1.H_2.H_3.\cdots.H_n = \{h_1.h_2.h_3.\cdots.h_n, \quad h_i \in H_i; \quad 1 \le i \le n\}$.

٢- $(H_1.H_2.H_3.\cdots.H_i) \cap H_{i+1} = \langle e \rangle, \quad i = 1,2,3,\cdots,(n-1)$.

قبل البدء بدراسة المجموع المباشر وخواصه لابد لنا من التمهيدية التالية:

**تمهيدية ٨-٢-١.**

لتكن $K,H$ زمراً جزئية ناظمية في $G$. إذا كان $K \cap H = \langle e \rangle$ عندئذ أياً كان $h \in H$ و $k \in K$ فإن $hk = kh$.

**البرهان.**

ليكن $k \in K, \quad h \in H$ عندئذ $khk^{-1}h^{-1} = (khk^{-1})h^{-1} \in H$ كما أن $khk^{-1}h^{-1} = k(hk^{-1}h^{-1}) \in K$ وهذا يبين لنا أن $khk^{-1}h^{-1} \in H \cap K = \langle e \rangle$ ومنه $hk = kh$. ○

المبرهنة التالية تبين لنا كيفية تمثيل عناصر المجموع المباشر لزمر.

**مبرهنة ٨-٢-٢.**

لتكن $K,H$ زمر جزئية ناظمية في $G$. الشروط التالية متكافئة:

١- $G = K \times H$.

٢- أياً كان $g \in G$ فإن $g$ يكتب بصورة وحيدة على النحو $g = kh$ حيث $k \in K, \quad h \in H$.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). لنفرض أن $G = K \times H$ عندئذ $G = K.H$ ومنه أياً كان $g \in G$ فإن $g = kh$ حيث $k \in K, \quad h \in H$. لنفرض أن $g = kh = k_1h_1$ حيث $k,k_1 \in K, \quad h,h_1 \in H$ ومنه $h_1h^{-1} = k_1^{-1}k \in H \cap K = \langle e \rangle$ أي أن $k = k_1, \quad h = h_1$.

(٢)⇐(١). بما أن $H$ ناظمية في $G$ عندئذ $H.K = K.H$ وهي زمرة جزئية في $G$. وحسب الفرض فإن $G = K.H$ لنفرض جدلاً أن $K \cap H \neq \langle e \rangle$ عندئذ يوجد $y \in K \cap H$ وأن $y \neq e$ ومنه $y = k = h$ حيث $k \in K, \quad h \in H$ وهكذا نجد أن



$kh^{-1} = e$ وهذا يناقض كون الكتابة وحيدة، إذن $K \cap H = \langle e \rangle$ وبالتالي $G = K \times H$. ○

يمكن تعميم المبرهنة(٨-٢-٢) من أجل أي عدد منته من الزمر الجزئية الناظمية وهذا التعميم يمكن صياغته بالشكل التالي:

**مبرهنة ٨-٢-٣.**

لتكن $H_1, H_2, H_3, \cdots, H_n$ مجموعة من الزمر الجزئية الناظمية من الزمرة $G$. الشروط التالية متكافئة:

١- $G = H_1 \times H_2 \times H_3 \times \cdots \times H_n$.

٢- أياً كان $g \in G$ فإن $g$ يكتب بصورة وحيدة على النحو التالي $g = h_1.h_2.h_3.\cdots.h_n$ حيث $h_i \in H_i$ لأجل كل $1 \le i \le n$.

**البرهان:**

ينتج بشكل مباشر من المبرهنة الأخيرة، ولذلك سوف نتركه للقارئ. ○

العلاقة الهامة بين الجداء المباشر والمجموع المباشر لزمر نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٨-٢-٤.**

لتكن $K,H$ زمر جزئية ناظمية من الزمرة $G$. عندئذ

$$K \times H \approx K \oplus H$$

**البرهان.**

لنعرف العلاقة $\varphi: K \times H \to K \oplus H$ بالشكل التالي: أياً كان $kh \in K.H$ فإن $\varphi(kh) = (k,h)$. فنجد أن العلاقة $\varphi$ تطبيق متباين، لأنه أياً كان $kh, k_1h_1 \in K \times H$ فإن

$$kh = k_1h_1 \Leftrightarrow k = k_1, \quad h = h_1 \Leftrightarrow (k,h) = (k_1,h_1) \Leftrightarrow \varphi(kh) = \varphi(k_1h_1)$$

واضح أن التطبيق $\varphi$ غامر. كذلك إن $\varphi$ تشاكل لأن

$$\varphi((kh)(k_1h_1)) = \varphi((kk_1)(hh_1)) = (kk_1, hh_1) = (k,h)(k_1,h_1) = \varphi(kh)\varphi(k_1h_1)$$

مما سبق نجد أن $K\times H \approx K\oplus H$ .◊

**مبرهنة ٨-٢-٥.**

لتكن $H_1,H_2,H_3,\cdots,H_n$ مجموعة من الزمر الجزئية الناظمية من الزمرة $G$. عندئذ

$$H_1\times H_2\times H_3\times\cdots\times H_n \approx H_1\oplus H_2\oplus H_3\oplus\cdots\oplus H_n .$$

**البرهان.**

نتركه للقارئ.◊

**مبرهنة ٨-٢-٦.**

لتكن $G$ زمرة و $H,K$ زمراً جزئية ناظمية في $G$ بحيث $G=K\times H$ ولتكن $L$ زمرة جزئية من $G$. عندئذ:

١ – توجد تشاكلات زمرية غامرة $\pi:G\to H,\rho:G\to K$.

٢ – كل من الزمر الجزئية $K\cap L, H\cap L$ ناظمية في الزمرة $L$.

٣ – الزمرة $H\cap L$ ناظمية في $\pi(L)$ والزمرة $K\cap L$ ناظمية في $\rho(L)$.

٤ – $L=(K\cap L)\times(H\cap L)$ عندما وفقط عندما $\pi(L)=H\cap L,\rho(L)=K\cap L$.

**البرهان.**

١ – ليكن $g\in G$ عندئذ فإن $g$ يكتب بصورة وحيدة على الشكل $g=kh$ حيث $k\in K,h\in H$. لنعرف العلاقة $\pi:G\to H$ بالشكل $\pi(g)=h$ فنجد أن $\pi$ تطبيق لأنه إذا كان $g_1,g_2\in G$ فإنه يوجد $k_1,k_2\in K,h_1,h_2\in H$ بحيث $g_1=k_1h_1,g_2=k_2h_2$. لنفرض أن $g_1=g_2$ عندئذ $k_1h_1=k_2h_2$ ومنه $h_1=h_2,k_1=k_2$ وبالتالي

$$\pi(g_1)=h_1=h_2=\pi(g_2)$$

لنبرهن على أن التطبيق $\pi$ تشاكل. حسب التمهيدية (٨-٢-١) فإن $kh=hk$ وذلك $\forall h\in H,k\in K$ ومنه



$$\pi(g_1g_2)=\pi(k_1h_1k_2h_2)=\pi(k_1k_2h_1h_2)=h_1h_2=\pi(g_1)\pi(g_2)$$

ومنه $\pi$ تشاكل كما أنه غامر، لأنه أياً كان $h\in H$ فإن $\pi(h)=h$. بشكل مشبه نجد أن العلاقة $\rho:G\to K$ هي أيضا تشاكل غامر.

٢ – إن $K\cap L$ زمرة جزئية من $L$. ليكن $g\in L$، ولنبرهن على أن $g(K\cap L)g^{-1}\subseteq K\cap L$. ليكن $x\in g(K\cap L)g^{-1}$ عندئذ يوجد $y\in K\cap L$ بحيث $x=gyg^{-1}$، وبما أن $y\in K$ وأن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ فإن $x=gyg^{-1}\in K$. من جهة أخرى، لدينا $g,y\in L$ ومنه $x=gyg^{-1}\in L$، وهذا يبين لنا أن $x=gyg^{-1}\in K\cap L$ أي أن الزمرة $K\cap L$ ناظمية في $L$. بشكل مشابه نجد أن الزمرة $H\cap L$ ناظمية في $L$.

٣ – لدينا حسب(٢) الزمرة $H\cap L$ ناظمية في $L$ ومنه حسب المبرهنة (٦-١) فإن الزمرة $\pi(H\cap L)$ تكون ناظمية في $\pi(L)$. لنفرض أن $\pi_0$ هو مقصور التشاكل $\pi$ على $H$ فنجد أن $\pi_0:H\to H$ وأن $\pi_0(h)=\pi(h)=h$ وذلك أياً كان $h\in H$ ومنه فإن

$$H\cap L=\pi_0(H\cap L)=\pi(H\cap L)\subseteq\pi(L)$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $H\cap L$ ناظمية $\pi(L)$. بشكل مشابه نجد أن الزمرة $K\cap L$ ناظمية في $\rho(L)$.

٤ – لنفرض أن $L=(K\cap L)\times(H\cap L)$ عندئذ وحسب تعريف كل من $\pi,\rho$ فإن $\pi(L)=(H\cap L)$ وأن $\rho(L)=(K\cap L)$.

لنفرض أن $\pi(L)=(H\cap L)$ وأن $\rho(L)=(K\cap L)$. لدينا حسب (٢) كل من $K\cap L,H\cap L$ زمر جزئية ناظمية في $L$ ومنه فإن الجداء $(K\cap L).(H\cap L)$ زمرة جزئية في $L$ أي أن $(K\cap L).(H\cap L)\subseteq L$.

ليكن $y\in L$ عندئذ $y\in G=KH$ ومنه $y=kh$ حيث $k\in K,h\in H$ ومنه حسب تعريف التشاكلات $\pi,\rho$ فإن

$$h=\pi(kh)=\pi(y)=\pi(L)=H\cap L$$

$$k = \rho(kh) = \rho(y) \in \rho(L) = K \cap L$$

ومنه نجد أن $y = kh \in (K\cap L)(H\cap L)$ أي أن $L \subseteq (K\cap L)(H\cap L)$ وبالتالي فإن $L = (K\cap L)(H\cap L)$ وأن $(K\cap L)\cap(H\cap L) = \langle e\rangle$ ومنه نجد أن $L = (K\cap L)\times(H\cap L)$ . ه

## ٨-٣. الجداء نصف المباشر للزمر.

لتكن $A,B$ زمرتين ما ولنفرض وجود تشاكل $\varphi: B \to Aut(A)$. ولنفرض أنه

$$\forall b\in B,\quad \varphi(b)=\hat{b} \in Aut(A)$$

لنأخذ المجموعة

$$G = A\oplus B = \{(a,b);\quad a\in A, b\in B\}$$

وجدنا في الفقرة (٨-١) أن المجموعة $G$ تشكل زمرة بالنسبة إلى العملية (.) المعرفة بالشكل:

$$\forall (a,b),(a_1,b_1)\in G;\quad (a,b).(a_1,b_1) = (aa_1, bb_1)$$

لنعرف على المجموعة $G$ عملية أخرى (.) بالشكل التالي:

$$\forall (a,b),(a_1,b_1)\in G;\quad (a,b).(a_1,b_1)=(a.\hat{b}(a_1), bb_1)$$

**تمهيدية ٨-٣-١.**

المجموعة $G=\{(a,b); a\in A, b\in B\}$ تشكل زمرة بالنسبة إلى العملية (.) المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall (a,b),(a_1,b_1)\in G;\quad (a,b).(a_1,b_1)=(a.\hat{b}(a_1), bb_1)$$

**البرهان.**

واضح أن المجموعة $G$ غير خالية، كما أن العملية (.) داخلية على $G$ وأن العنصر $(e_A,e_B)$ هو العنصر الحيادي في $G$ بالنسبة إلى هذه العملية. وأن العملية (.) تجميعية لأنه $\forall (a,b),(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in G$ فإن

$$(a,b).[(a_1,b_1).(a_2,b_2)] = (a,b)(a_1.\hat{b}_1(a_2), b_1b_2) = (a.\hat{b}(a_1.\hat{b}_1(a_2)), b(b_1.b_2)) =$$

$$= (a.\hat{b}(a_1)\hat{b}(\hat{b}_1(a_2)), (bb_1)b_2) = (a.\hat{b}(a_1).\hat{b}\circ\hat{b}_1(a_2), (bb_1)b_2) =$$



$$= (a\hat{b}(a_1).\hat{bb_1}(a_2), (bb_1)b_2) = (a.\hat{b}(a_1), bb_1)(a_2,b_2) = [(a,b)(a_1,b_1)](a_2,b_2)$$

ولكل عنصر $(a,b)\in G$ يوجد مقلوب هو $(a,b)^{-1} = (\hat{b}^{-1}(a), b^{-1})$. (تأكد من ذلك). ه

**تعريف.**

لتكن $A,B$ زمرتين. نسمي الزمرة $G$ بالنسبة إلى العملية المعرفة في التمهيدية (٨-٣-١) زمرة الجداء نصف المباشر للزمرتين $A,B$ وذلك بالنسبة إلى التشاكل $\varphi:B\to Aut(A)$.

**ملاحظة.**

لتكن $G$ زمرة الجداء نصف المباشر للزمرتين $A,B$ بالنسبة إلى التشاكل $\varphi: B\to Aut(A)$. إذا كان

$$\forall b\in B,\quad \varphi(b)=\hat{b} = I_A$$

فإن $G$ هي زمرة الجداء المباشر للزمر $A,B$.

**مبرهنة ٨-٣-٢.**

لتكن $G$ زمرة و $A,B$ زمرتين جزئيتين من الزمرة $G$. ولنفرض أن $O(A)$ مجموعة التطبيقات للزمرة الجزئية $A$. إذا وجد تطبيق $\varphi:B\to O(A)$ يحقق:

١- $G=A.B$.

٢- $A\cap B=\langle e\rangle$.

٣- $ba=\varphi(a).b$ وذلك أياً كان $a\in A, b\in B$.

عندئذ فإن التطبيق $\varphi:B\to Aut(A)$ هو تشاكل زمري، كما أن $G$ تماثل الجداء نصف المباشر للزمر $A,B$ بالنسبة إلى التشاكل $\varphi$.

**البرهان.**

لنفرض وجود التطبيق $\varphi:B\to O(A)$ ولنفرض أن $\forall b\in B;\varphi(b)=\hat{b}$. لنبرهن على أن $\forall b\in B;\varphi(b)=\hat{b}\in O(A)$ هو تماثل للزمرة $A$. لدينا $\hat{b}: A\to A$ هو

تطبيق للزمرة $A$ وحسب الشرط (٣) فإن $ba=\hat{b}(a).b$. لنبرهن على أن $\hat{b}$ تشاكل للزمرة $A$. ليكن $a_1,a_2\in A$ عندئذ

$$\hat{b}(a_1.a_2).b = b(a_1a_2) = (ba_1)a_2 = (\hat{b}(a_1).b)a_2 = \hat{b}(a_1)(ba_2) =$$
$$= \hat{b}(a_1).\hat{b}(a_2).b$$

ومنه نجد أن $\hat{b}(a_1.a_2).b=\hat{b}(a_1).\hat{b}(a_2).b$ وبالتالي فإن $\hat{b}(a_1.a_2)=\hat{b}(a_1).\hat{b}(a_2)$ وهذا يبين لنا أن التطبيق $\hat{b}$ هو تشاكل للزمرة $A$. لنبرهن على أن $\hat{b}$ متباين. ليكن $a_1,a_2\in A$ بحيث $\hat{b}(a_1)=\hat{b}(a_2)$ ومنه $\hat{b}(a_1).b=\hat{b}(a_2).b$ وحسب الشرط (٣) فإن $ba_1=ba_2$ وبالتالي $a_1=a_2$ أي أن التشاكل $\hat{b}$ متباين.

بما أن $b\in B$ فإن $b^{-1}\in B$ وأن $\hat{b}^{-1}:A\to A$ هو تشاكل للزمرة $A$. ليكن $a\in A$ عندئذ حسب (٣) $\hat{b}^{-1}(a).b^{-1}=b^{-1}.a$ ومنه $b^{-1}ab=\hat{b}^{-1}(a)\in A$ وبالتالي فإن

$$\hat{b}(b^{-1}ab).b=b(b^{-1}.a.b)=a.b$$

ومنه $\hat{b}(b^{-1}ab)=a$، وهذا يبين لنا أن التشاكل $\hat{b}$ غامر. مما سبق نجد أن التطبيق $\hat{b}$ هو تماثل للزمرة $A$، وبالتالي $\varphi(B)\subseteq Aut(A)$ ومنه $\varphi:B\to Aut(A)$ هو تطبيق.

لنبرهن على أن التطبيق $\varphi:B\to Aut(A)$ هو تشاكل زمري. ليكن $b_1,b_2\in B$ عندئذ $b_1.b_2\in B$ وأن $\varphi(b_1.b_2)=\widehat{b_1b_2}$ و أن $\widehat{b_1b_2}$ هو تماثل للزمرة $A$. ومنه أياً كان $a\in A$ فإن

$$\widehat{b_1b_2}(a).b_1b_2 = (b_1b_2)a = b_1(b_2a) = b_1(\hat{b}_2(a).b_2) = (b_1.\hat{b}_2(a))b_2 =$$
$$= (\hat{b}_1(\hat{b}_2(a)b_1)b_2 = \hat{b}_1(\hat{b}_2(a))b_1b_2 = \hat{b}_1\circ\hat{b}_2(a)b_1b_2$$

ومنه أياً كان $a\in A$ فإن

$$\widehat{b_1b_2}(a)=\hat{b}_1\circ\hat{b}_2(a)$$

وهذا يبين لنا أن $\widehat{b_1b_2}=\hat{b}_1\circ\hat{b}_2$ أي أن $\varphi(b_1b_2)=\varphi(b_1)\circ\varphi(b_2)$ ومنه نجد أن التطبيق $\varphi$ هو تشاكل. ○



## تمارين محلولة ( ٨ )

١- أوجد عدد جميع العناصر في الزمرة $Z_{25}\oplus Z_5$ والتي مرتبة كل منها تساوي 5.

**الحل.**

ليكن $(a,b)\in Z_{25}\oplus Z_5$ بالاعتماد على المبرهنة (٨-١-٤) فإن $5=o((a,b))=lcm(o(a),o(b))$ وهذا يتحقق في الحالات التالية:

$o(a)=1,\quad o(b)=5$ و $o(a)=o(b)=5$ و $o(a)=5,\quad o(b)=1$.

- الحالة الأولى: إذا كان

$$o(a)=1,\quad o(b)=5$$

وهنا نجد أنه يوجد في $Z_{25}$ عنصر واحد مرتبته 1، وأربعة عناصر في $Z_5$ مرتبة كل واحد منها تساوي 5. ومنه يوجد لدينا في هذه الحالة أربعة عناصر على الأكثر في $Z_{25}\oplus Z_5$ مرتبة كل منها 5.

- الحالة الثانية: إذا كان

$$o(a)=o(b)=5$$

وهنا نجد أنه توجد في $Z_{25}$ أربعة عناصر مرتبة كل واحد منها تساوي 5 وأربعة عناصر في $Z_5$ مرتبة كل واحد منها تساوي 5. ومنه يوجد لدينا في $Z_{25}\oplus Z_5$، 16 عنصر مرتبة كل منها 5.

- الحالة الثالثة: إذا كان

$$o(a)=5, o(b)=1$$

وهنا نجد أنه يوجد في $Z_{25}$ أربعة عناصر مرتبة كل واحد منها تساوي 5، وعنصر واحد في $Z_5$ مرتبته 1. وفي هذه الحالة نجد أنه يوجد لدينا في $Z_{25}\oplus Z_5$ على الأكثر 4 عناصر مرتبة كل منها تساوي 5. مما سبق نجد أنه يوجد في $Z_{25}\oplus Z_5$ أربعة وعشرون عنصراً مرتبة كل منها تساوي 5. ○

٢- أوجد عدد جميع الزمر الجزئية الدوارة في الزمرة $Z_{100} \oplus Z_{25}$ والتي مرتبة كل منها تساوي $10$.

**الحل.**

لنوجد أولاً عدد جميع العناصر في الزمرة $Z_{100} \oplus Z_{25}$ والتي مرتبة كل منها تساوي $10$. ليكن $(a,b) \in Z_{100} \oplus Z_{25}$. لدينا حسب المبرهنة(٨-١-٤) فإن

$$10 = o((a,b)) = lcm(o(a),o(b))$$

وهذا يتحقق إذا كان

$o(a)=10,\ \ o(b)=1$ ، $o(a)=10,\ \ o(b)=5$ ، $o(a)=2,\ \ o(b)=5$ .

- الحالة الأولى: إذا كان $o(a)=10,\ \ o(b)=1$. بما أن الزمرة $Z_{100}$ تحوي زمرة جزئية دوارة واحدة فقط مرتبتها $10$ وأن أي زمرة دوارة مرتبتها $10$ تملك أربع مولدات، وذلك حسب المبرهنة(٣-١-٩). وفي هذه الحالة نجد أنه توجد لدينا أربع احتمالات للعنصر $(a,b)$.

- الحالة الثانية: إذا كان $o(a)=10,\ \ o(b)=5$. كما وجدنا في الحالة الأولى فإن للعنصر $a$ أربعة احتمالات. وبما أنه في $Z_{25}$ يوجد أربعة عناصر مرتبة كل منها تساوي $5$، نجد أنه في هذه الحالة يوجد لدينا $16$ إمكانية للعنصر $(a,b)$.

- الحالة الثالثة: إذا كان $o(a)=2,\ \ o(b)=5$. بما أن أي زمرة دوارة مرتبتها عدد زوجي تحوي زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها $2$، نجد أن للعنصر $a$ إمكانية واحدة فقط، وللعنصر $b$ أربعة إمكانيات. وفي هذه الحالة نجد أنه توجد لدينا $4$ احتمالات للعنصر $(a,b)$. مما سبق نجد أنه يوجد $24$ عنصر في الزمرة $Z_{100} \oplus Z_{25}$ مرتبة كل منها تساوي $10$. وبما أن أية زمرة دوارة مرتبتها $10$ تملك $4$ مولدات يتبين لنا أنه توجد $\frac{24}{4}=6$ زمرة جزئية مختلفة في الزمرة $Z_{100} \oplus Z_{25}$. ◦

٣- الزمرة $Z \oplus Z$ ليست دوارة.

**الحل.**

لنفرض جدلاً أن الزمرة $Z \oplus Z$ دوارة مولدة بالعنصر $(a,b)$ حيث $a,b \in Z$. أي



$Z \oplus Z = \langle (a,b) \rangle$، نميز حالتين:

- الحالة الأولى: إذا كان $a=b$ عندئذ نجد أن $(1,2) \notin \langle (a,b) \rangle$ وهذا غير ممكن.

- الحالة الثانية: إذا كان $a \neq b$ عندئذ نجد أن $(1,1) \notin \langle (a,b) \rangle$ وهذا غير ممكن.

مما سبق نجد أن الزمرة $Z \oplus Z$ ليست دوارة. ◦

٤- من أجل أي زمرتين $A,B$ أثبت أن $\frac{A \oplus B}{A} \approx B$.

**الحل.**

لنعرف التطبيق $\varphi : A \oplus B \to B$ بالشكل التالي: أياً كان $(a,b) \in A \oplus B$ فإن $\varphi(a,b)=b$. فنجد أن $\varphi$ تشاكل، لأنه أياً كان $(a,b),(a_1,b_1) \in A \oplus B$ فإن

$$\varphi[(a,b).(a_1,b_1)] = \varphi(aa_1,bb_1) = bb_1 = \varphi(a,b)\varphi(a_1,b_1)$$

كما أن $\varphi$ غامر، لأنه أياً كان $b \in B$ فإن $(e,b) \in A \oplus B$ وأن $\varphi(e,b)=b$ ومنه $\frac{A \oplus B}{Ker\varphi} \approx B$. من الواضح أن $Ker\varphi = A \oplus \langle e \rangle$. وحسب المبرهنة (٨-١-٢) فإن $A \approx A \oplus \langle e \rangle$ وبالتالي $\frac{A \oplus B}{A} \approx B$. ◦

## تمـــاريـن ( ٨ )

١- أوجد مرتبة كل عنصر من الزمرة $Z_2 \oplus Z_4$.

٢- لتكن $G$ زمرة. أثبت أن المجموعة $H = \{(g,g): \quad g \in G\}$ زمرة جزئية من الزمرة $G \oplus G$.

٣- هل الزمرتان $Z_{27}, \quad Z_3 \oplus Z_9$ متماثلتان؟

٤- هل الزمرتان $Z_{15}, \quad Z_3 \oplus Z_5$ متماثلتان؟

٥- أوجد جميع الزمر الجزئية التي مرتبة كل منها 3 في الزمرة $Z_9 \oplus Z_3$.

٦- أوجد جميع الزمر الجزئية التي مرتبة كل منها 4 في الزمرة $Z_4 \oplus Z_4$.

٧- عين في الزمرة $Z_{12} \oplus Z_4 \oplus Z_{15}$ زمرة جزئية مرتبتها 9.

٨- لتكن $G$ زمرة تبديلية جمعية، و $n$ عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أن المجموعة $H = \{(g,ng); \quad g \in G\}$ هي زمرة جزئية من الزمرة $G \oplus G$.

٩- أثبت أن الزمرة $Z_{12} \oplus Z_{20}$ تحوي زمرة جزئية تماثل $Z_4 \oplus Z_{25}$.

١٠- أثبت أن الزمرة $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ تحوي سبع زمر جزئية مرتبة كل منها 2.

١١- في زمرة الأعداد الصحيحة $Z$ لنفرض أن $K = \langle 7 \rangle, \quad H = \langle 5 \rangle$. أثبت أن $Z = K.H$. وهل $Z = K \times H$؟

١٢- أثبت أن الزمرة $U(117)$ تحوي زمرة جزئية تماثل $Z_3 \oplus Z_3$.

١٣- أثبت أن الزمرة $U(65)$ تحوي زمرة جزئية تماثل $Z_4 \oplus Z_4$.

١٤- أثبت أن الزمرتين $U(75), \quad U(55)$ متماثلتان.

١٥- أثبت أن الزمرتين $U(140), \quad U(144)$ متماثلتان.

١٦- هل الزمرتان $Z_6 \oplus Z_{10}, \quad Z_4 \oplus Z_{15}$ متماثلتان؟

١٧- أوجد عدد جميع الزمر الجزئية الدوارة من المرتبة 15 في الزمرة $Z_{90} \oplus Z_{36}$.



١٨- لتكن $H,K$ زمر تبديلية و $n$ عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أن $(H \oplus K)^n \cong H^n \oplus K^n$. حيث
$H^n = \{h^n, \quad h \in H\}, \quad K^n = \{k^n, \quad k \in K\}$.

١٩- أوجد عدد جميع العناصر من المرتبة 15 في الزمرة $Z_{30} \oplus Z_{20}$، ثم عين جميع الزمر الجزئية الدوارة من المرتبة 15 في الزمرة $Z_{30} \oplus Z_{20}$.

٢٠- أي من الزمر التالية $Z_8, \quad Z_4 \oplus Z_2, \quad Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ تماثل الزمرة $Z_4 \oplus Z_{12} / \langle (2,2) \rangle$.

٢١- لتكن $G = U(32)$ و $H = \{1,31\}$. أي من الزمر التالية $Z_8, \quad Z_4 \oplus Z_2, \quad Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ تماثل الزمرة $G/H$.

٢٢- لتكن $G = U(16)$ و $H = \{1,15\}$، $K = \{1,9\}$. هل الزمرتان $H,K$ متماثلتان؟ وهل الزمرتان $G/H, G/K$ متماثلتان؟

٢٣- لتكن $G = Z_4 \oplus Z_4$ و $H = \{(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)\}$، $K = \langle (1,2) \rangle$. أي من الزمر التالية $Z_2 \oplus Z_2, \quad Z_4$ تماثل الزمرة $G/H$. وأي من الزمر التالية $Z_2 \oplus Z_2, \quad Z_4$ تماثل الزمرة $G/K$.

٢٤- لتكن $G$ زمرة و $H,K$ زمراً جزئية ناظمية في $G$ بحيث $G = K \times H$ ولتكن $L$ زمرة جزئية من $G$. بفرض أن $(H:1) = n, (K:1) = m$ وأن $\gcd(n,m) = 1$ فإن $L = (K \cap L) \times (H \cap L)$.

# الفصـــل التــــاســـع

# النظـــريـــة الأســـاسيـــة للـــزمـــر التبديلية المنتهيـــة والمنتهيـــة التـــوليـــد

في هذا الفصل سوف ندرس الزمر التبديلية المنتهية والمنتهية التوليـد وخواصـها وتمثيلها، وسوف نبدأ من المبرهنة التالية التي تبين لنا مدى روعة التقنيات التي يمكن استخدامها في نظرية الزمر بالاعتماد على زمرة الخارج.

## ٩-١. الــزمــر التبــديليــة المنتهيــة.

**مبرهنـــة ٩-١-١.**

ليكن $p$ عدداً أولياً و $G$ زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة علـى العـدد $p$. عندئذ يوجد في $G$ عنصر مرتبته $p$.

**البرهـــان.**

لنفرض أن $(G:1)=n$ عندئذ $n=mp$ حيـث $m \in Z$. سـوف نـورد البرهـان بالاستقراء حسب $m$. إذا كان $m=1$ عندئذ $n=p>1$ وبالتالي تكون الزمرة $G$ دوارة ويوجد فيها عنصر $x$ مرتبته $p$. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل جميع الزمـر الجزئية المحتواة تماما في $G$. وهنا نميز حالتين:

– الحالة الأولى. يوجد في $G$ زمرة جزئية $H \neq G$ دليلها لا يقبل القسـمة علـى $p$، عندئذ وحسب مبرهنة لاغرانج فإن $(G:1)=(G:H)(H:1)$ وبالتالي فـإن $(H:1)$ تقبل القسمة على $p$ وحسب الفرض الاستقرائي يوجد فـي $H$ عنصـر مرتبتـه $p$ وبالتالي فإن $G$ تحوي عنصر مرتبته $p$.

- الحالة الثانية. جميع الزمر الجزئية المحتواة تماما في $G$ أدلتها تقبل القسمة على $p$. لنرمز لمجموعة كل الزمر الجزئية المحتواة تماما في $G$ بالرمز $\Im$ ولنختر من $\Im$ العنصر ذا الرتبة الأكبر، وليكن $K$. إن $K$ عنصر أعظمي في $\Im$ (علل ذلك) وبالتالي فإن $K$ أكبر زمرة جزئية محتواة تماما في $G$. لنفرض أن $(K:1)=s$. إذا كان العدد $s$ يقبل القسمة على $p$ فإن $K$ تحوي عنصراً مرتبته $p$. لنفرض أن $s$ لا يقبل القسمة على $p$، وليكن $x\in G$ بحيث $x\notin K$ ولنأخذ الزمرة $T=\langle x\rangle$. ولنفرض أن $(T:1)=t$ عندئذ $G=KT$ (أثبت ذلك) ومنه $G/K=KT/K\approx T/(K\cap T)$ وهكذا فإن

$$mp=(KT:K)(K:1)=(T:T\cap K)(K:1)$$

وبما أن العدد $s$ لا يقبل القسمة على $p$ نجد أن $(T:T\cap K)$ يقبل القسمة على $p$ وبما أن

$$(T:1)=(T:T\cap K)(T\cap K:1)$$

فإن $(T:1)=t$ تقبل القسمة على $p$ وهكذا فإن $x^{\frac{t}{p}}\in G$ عنصر مرتبته $p$.

بالاعتماد على المبرهنة السابقة نحصل على النتيجة التالية:

**نتيجة.**

كل زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي $p$ تحوي زمرة جزئية مرتبتها $p$.

نأتي الآن لإثبات صحة المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية المنتهية التي تنص على أن كل زمرة تبديلية منتهية هي مجموع مباشر لعدد منته من الزمر الدوارة المنتهية التي مرتبة كل منها قوة لعدد أولي، وهذا التمثيل وحيد بغض النظر عن ترتيب المضاريب في هذا المجموع. وبسبب كون البرهان طويلاً ومعقداً فإننا سوف نجزئه إلى عدد من المبرهنات التي تعد كل واحدة منها نتيجة هامة بحد ذاتها. وسوف نبدأ من بالمبرهنة التالية:



مبرهنة ٩-١-٢.

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية مرتبتها $mp^n$ حيث $p$ عدد أولي و $n,m$ أعداد صحيحة موجبة وأن $p$ لا يقسم $m$. عندئذ $G=K\times H$ حيث

$$K=\{x:x\in G;\quad x^m=e\} \text{ و } H=\{x:x\in G;\quad x^{p^n}=e\}$$

بالإضافة لذلك فإن $(H:1)=p^n$.

**البرهان.**

بالعودة إلى التمرين المحلول (٢-٥) نجد أن كلاً من $K,H$ زمرة جزئية من $G$. وبما أن الزمرة $G$ تبديلية فإن $KH=HK$ وحسب المبرهنة (٥-١-٣) فإن الجداء $KH$ هو زمرة جزئية من $G$. وبما أن العدد $p$ أولي وأن $m$ لا يقبل القسمة على $p$ فإن $\gcd(p,m)=1$ ومنه $\gcd(p^n,m)=1$ وبالتالي يوجد $s,t\in Z$ بحيث $1=sm+tp^n$ ومنه أياً كان $x\in G$ فإن $x=x^1=x^{sm+tp^n}=x^{sm}x^{tp^n}$ وبما أن $(x^{sm})^{p^n}=e$ وأن $(x^{tp^n})^m=e$ نجد أن $x^{sm}\in H,x^{tp^n}\in K$ أي أن $x\in KH$ وهكذا فإن $G\subseteq KH$ وهذا يبين لنا أن $G=KH$. ليكن $y\in K\cap H$ ولنفرض أن مرتبة العنصر $y$ تساوي $\lambda$ عندئذ $y^\lambda=e$ وبما أن $y\in H$ فإن $y^{p^n}=e$. كذلك بما أن $y\in K$ فإن $y^m=e$ وهكذا نجد أن $\lambda$ يقسم كلاً من $p^n,m$ وبما أن $\gcd(p^n,m)=1$ نجد أن $\lambda=1$. ومنه $y=e$ أي أن $K\cap H=\langle e\rangle$. مما سبق نجد أن $G=K\times H$. لنبرهن الآن على أن $(H:1)=p^n$. حسب التمرين المحلول(٥-٦) لدينا

$$(KH:1)=\frac{(H:1)(K:1)}{(K\cap H:1)}=(H:1)(K:1)=P^n m$$

إن $(K:1)$ لا تقبل القسمة على $p$، لأنه إذا كانت $(K:1)$ تقبل القسمة على $p$ فإن $(K:1)=\alpha p$ حيث $\alpha\in Z$ وحسب المبرهنة (٩-١-١) فإن الزمرة $K$ تحوي عنصراً مرتبته $p$. لنرمز لهذا العنصر بالرمز $z$. بما أن $z\in K$ فإن $z^m=e$ ومنه نجد أن $m$ يقبل القسمة على $p$، وهذا يناقض الفرض. إذن $(K:1)$ لا تقبل القسمة

على $p$ . ومنه فإن $(H:1)$ تقبل القسمة على $p$ وبالتالي $(H:1)$ تقبل القسمة على $p^n$ ، وهذا يبين لنا أن $(H:1)=p^n$ .

يمكن تعميم المبرهنة السابقة على الشكل التالي:

**نتيجة.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية بحيث $(G:1)=p_1^{n_1}.p_2^{n_2}.\cdots.p_k^{n_k}$ حيث $p_i$ أعداد أولية مختلفة. ولتكن $G(p_i)=\{x:x\in G;\quad x^{p_i^{n_i}}=e\}$ . عندئذ

$$G=G(p_1)\times G(p_2)\times\cdots\times G(p_k)$$

وأن $(G(p_i):1)=p_i^{n_i}$ .

نأتي الآن إلى الخطوة التالية وهي المبرهنة الهامة التالية:

**مبرهنة ٩-١-٣.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية مرتبتها قوة للعدد الأولي $p$ وليكن $a\in G$ العنصر ذا المرتبة الأعظمية في $G$. عندئذ يمكن نشر الزمرة $G$ على الشكل $G=\langle a\rangle\times K$، حيث $K$ زمرة جزئية مناسبة من $G$.

**البرهان.**

لنفرض أن $(G:1)=p^n$. البرهان سوف نورده بالاستقراء حسب $n$. إذا كان $n=1$ عندئذ الزمرة $G$ هي زمرة دوارة وأن $G=\langle a\rangle$ حيث $a\in G$ مرتبته أعظمية، وبالتالي $G=\langle a\rangle\times\langle e\rangle$. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل كل زمرة مرتبتها من الشكل $p^k$ حيث $k<n$. ولنختر من $G$ العنصر $a$ ذا المرتبة الأعظمية، ولنفرض أن $o(a)=p^m$. لنبرهن أنه أياً كان $x\in G$ فإن $x^{p^m}=e$. ليكن $x\in G$ عنصراً مرتبته $p^s$. بما أن $a\in G$ عنصر مرتبته أعظمية، فإن $s<m$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r\in Z$ بحيث $m=qs+r$ وأن $0\le r<s$. لنفرض جدلاً أن $r\neq 0$ عندئذ يكون $m-r<m$ وأن $x^{p^m}=x^{p^{qs+r}}=(x^{p^s})^q.x^{p^r}=x^{p^r}$ وبالتالي $x^{p^{m-r}}=e$ وذلك أياً كان $x\in G$، وبما أن $a\in G$ فإن $a^{p^{m-r}}=e$ وهذا يناقض كون $o(a)=p^m$. إذن $r=0$ وبالتالي أياً كان $x\in G$ فإن $x^{p^m}=e$. إذا كان $G=\langle a\rangle$



عندئذ $G=\langle a\rangle\times\langle e\rangle$ ويتم المطلوب. لنفرض أن $G\neq\langle a\rangle$ ولنختر من $G$ العنصر $b$ ذا المرتبة الأصغر والذي من أجله $b\notin\langle a\rangle$. لدينا $b^p\in G$ وأن $o(b^p)<o(b)$ وبالتالي فإن $b^p\in\langle a\rangle$. بهذا الشكل نجد أن $b^p\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle$ ومنه $b^p=a^i$ وأن $e=b^{p^m}=(b^p)^{p^{m-1}}=(a^i)^{p^{m-1}}$ وهكذا فإن $o(a^i)\le p^{m-1}$ أي أن العنصر $a^i$ ليس مولداً للزمرة $\langle a\rangle$ وذلك لأن $o(a)=(\langle a\rangle:1)=p^m$ وحسب المبرهنة (٣-١-٨) فإن $\gcd(p^m,i)\neq 1$ أي يوجد قاسم مشترك لكل من $p^m,i$ وهذا يبين لنا أن $p$ يقسم $i$ وبالتالي يوجد $j\in Z$ بحيث $i=pj$ ومنه $b^p=a^i=a^{pj}$ لنأخذ العنصر $c=a^{-j}b$. فنجد أن $c\notin\langle a\rangle$ لأنه إذا كان $c\in\langle a\rangle$ فإن $b=ca^j\in\langle a\rangle$، وهذا غير ممكن. كما أن

$$c^p=a^{-jp}b^p=a^{-i}b^p=b^{-p}b^p=e$$

وهكذا نجد أنه يوجد في $G$ عنصر $c$ مرتبته $p$ وأن $c\notin\langle a\rangle$ وهذا يبين لنا أن $o(b)=p$ وبالتالي $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\langle e\rangle$. لنأخذ الزمرة $\overline{G}=G/\langle b\rangle$. وليكن $x\in G$ ولنفرض أن $\overline{x}=x\langle b\rangle\in G/\langle b\rangle=\overline{G}$. نلاحظ أن $o(\overline{a})=o(a)=p^m$ لأنه إذا كان $o(\overline{a})<o(a)=p^m$ فإن $(\overline{a})^{p^{m-1}}=\overline{e}$ وبالتالي $(a\langle b\rangle)^{p^{m-1}}=a^{p^{m-1}}\langle b\rangle=\langle b\rangle$ ومنه $a^{p^{m-1}}\in\langle b\rangle$. مما سبق نجد أن $a^{p^{m-1}}\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\langle e\rangle$ أي أن $a^{p^{m-1}}=e$ وهذا يناقض كون $o(a)=p^m$. إذن $o(\overline{a})=o(a)=p^m$ وهكذا نجد أن العنصر $\overline{a}$ هو العنصر من $\overline{G}$ ذو المرتبة الأكبر. وحسب الفرض الاستقرائي نجد أن $\overline{G}=\langle\overline{a}\rangle\times\overline{K}$ حيث $\overline{K}$ زمرة جزئية مناسبة من $\overline{G}$. لنأخذ الصورة العكسية للزمرة الجزئية $\overline{K}$ وفق التشاكل القانوني الغامر. أي لنأخذ المجموعة

$$K=\{x:x\in G;\quad \overline{x}\in\overline{K}\}$$

إن $K$ زمرة جزئية من $G$ وأن $\langle a\rangle\cap K=\langle e\rangle$ لأنه إذا كان $x\in\langle a\rangle\cap K$ فإن $\overline{x}\in\langle\overline{a}\rangle\cap\overline{K}=\langle\overline{e}\rangle$ وبالتالي $x\in\langle b\rangle$ أي أن $x\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\langle e\rangle$ ومنه $\langle a\rangle\cap K=\langle e\rangle$. كما أن $G=\langle a\rangle.K$ وهكذا نجد أن $G=\langle a\rangle\times K$ .

بالاعتماد على المبرهنة (٩-١-٣) نتوصل إلى الحقيقة الهامة التالية:

**مبرهنـــة ٩-١-٤.**

كل زمرة تبديلية منتهية مرتبتها قوة لعدد أولي هي مجموع مباشر لزمر دوارة.

**البرهـــان.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية بحيث $(G:1)=p^n$ حيث $p$ عـــدد أولـــي و $n\in Z$. سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب $n$. من أجل $n=1$ فـــإن $(G:1)=p$ وبالتـــالي الزمرة $G$ دوارة، ومنه $G=\langle a\rangle\times\langle e\rangle$ حيـــث $a\in G$. لنفـــرض الآن أن المبرهنـــة صحيحة من أجل كل زمرة جزئية محتواة تماما في $G$. أي لأجل كل زمـــرة جزئيـــة مرتبتها مـــن الشـــكل $p^s$ حيـــث $s<n$. بمـــا أن $(G:1)=p^n$ وبالاعتمـــاد علـــى المبرهنة(٩-١-٣) فإن $G=\langle a\rangle\times K$ حيث $a\in G$ العنصر ذو المرتبة الأعظمية في $G$ و $K$ زمـــرة جزئيـــة مناســـبة مـــن $G$. وبمـــا أن $a\notin K$ فـــإن $(K:1)=p^s$ حيث $1\le s<n$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن

$$K=H_1\times H_2\times\cdots\times H_t$$

حيث كل من $H_i$ هي زمرة جزئية دوارة من $K$. ومنه

$$G=\langle a\rangle\times H_1\times H_2\times\cdots\times H_t \text{ ∘}$$

بالاعتماد على المبرهنتين(٩-١-٢) و(٩-١-٣) نصل إلى المبرهنة الهامة التالية:

**مبرهنـــة ٩-١-٥.**

كل زمرة تبديلية منتهية هي مجموع مباشر لزمر دوارة مرتبة كل منها قوة لعـــدد أولي.

**البرهـــان.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية. ولنفرض أن $(G:1)=n$. بمـــا أن $n$ عـــدد صـــحيح موجب فإنه بالإمكان كتابته على الشكل $n=p_1^{n_1}.p_2^{n_2}.\cdots.p_t^{n_t}$ حيث $p_i$ أعـــداد أوليـــة مختلفة من أجل كل $1\le i\le t$. ومنه حسب نتيجة المبرهنة (٩-١-٢) نجد أن

$$G=G(p_1)\times G(p_2)\times\cdots\times G(p_t)$$

حيث كل من $G(p_i)$ هي زمرة دوارة مرتبتها $p_i^{n_i}$ وهـــي قـــوة للعـــدد الأولـــي $p_i$. وحسب المبرهنة(٩-١-٤) فإن كل زمرة من الزمر $G(p_i)$ هي مجموع مباشر لزمر دوارة. مما سبق نستنتج أن $G$ هي مجموع مباشر لزمر دوارة مرتبة كل منهـــا قـــوة لعدد أولي. ∘

لإثبات صحة المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية المنتهية بقي لنـــا إثبـــات الحقيقـــة التالية:

**مبرهنـــة ٩-١-٦.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية مرتبتها قوة لعدد أولي. إذا كان

$$G=H_1\times H_2\times H_3\times\cdots\times H_m,\qquad G=K_1\times K_2\times K_3\times\cdots\times K_n$$

حيـــث كـــل مـــن $H_j, K_i$ زمـــر جزئيـــة دوارة مغـــايرة للزمـــرة $\langle e\rangle$ أيـــاً كـــان $1\le i\le n$, $1\le j\le m$. وأن

$$(H_i:1)\ge(H_{i+1}:1),\qquad (K_j:1)\ge(K_{j+1}:1)$$

عندئذ $n=m$ وأن $(H_i:1)=(K_i:1)$ وذلك أياً كان $1\le i\le n$.

**البرهـــان.**

سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب مرتبة الزمرة $G$. لنفرض أن $(G:1)=p^t$. من أجل $t=1$ نجد أن $(G:1)=p$ والمبرهنة صحيحة. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل جميع الزمر التبديلية التي مراتبها أصغر من مرتبة الزمرة $G$. بما أنـــه مـــن أجل أية زمرة تبديلية $L$ فإن المجموعة $L^p=\{x^p:\quad x\in L\}$ هـــي زمـــرة جزئيـــة من $L$ نجد أن

$$G^p=H_1^p\times H_2^p\times\cdots\times H_{m'}^p \text{ و } G^p=K_1^p\times K_2^p\times\cdots\times K_{n'}^p.$$

حيث $m'$ هو أكبر عدد صحيح بين الأعداد $i$ التي من أجلها $(H_i:1)>p$ وأن $n'$ هو أكبر عدد صحيح بين الأعداد $j$ التي من أجلها $(K_j:1)>p$. وهذا يبين لنـــا أن كـــلا الجدائين المباشرين السابقين للزمرة $G^p$ لا يحـــوي مضـــاريب تســـاوي $\langle e\rangle$. وبمـــا أن $(G^p:1)<(G:1)$ فإنـــه حســـب الفـــرض الاســـتقرائي نســـتنتج أن $m'=n'$

وأن $(H_i^p:1)=(K_i^p:1)$ حيث $i=1,2,\cdots,m'$. وبما أن $(H_i:1)=p(H_i^p:1)$ وأن $(K_i:1)=p(K_i^p:1)$ نجد أن $(H_i:1)=(K_i:1)$ حيث $i=1,2,\cdots,m'$. بقي لنا أن نبرهن أن عدد الزمر $H_i$ التي مراتبها تساوي $p$ يساوي عدد الزمر $K_i$ التي مراتبها تساوي $p$. بمعنى آخر يجب أن نبرهن أن $m-m'=n-n'$. بما أن $(H_i:1)=(K_i:1)$ حيث $i=1,2,\cdots,m'$ وأن $m'=n'$ ولكون

$$(H_1:1)(H_2:1)\cdots(H_{m'}:1)p^{m-m'}=(G:1)=(K_1:1)(K_2:1)\cdots(K_{n'}:1)p^{n-n'}$$

نجد أن $p^{m-m'}=p^{n-n'}$ أي أن $m-m'=n-n'$ وبالتالي $n=m$. ∘

نأتي الآن لإثبات المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية المنتهية.

**مبرهنة ٩-١-٧.(المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية المنتهية).**

كل زمرة تبديلية منتهية عبارة عن مجموع مباشر لزمر دوارة مرتبة كل منها قوة لعدد أولي. علاوة على ذلك فإن هذا التمثيل وحيد بغض النظر عن ترتيب المضاريب.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية. حسب المبرهنة (٩-١-٥) فإن $G$ هي مجموع مباشر لزمر دوارة مرتبة كل منها قوة لعدد أولي. وحسب المبرهنة (٩-١-٦) فإن هذا التمثيل وحيد. ∘

لنورد بعض الأمثلة على النظرية الأساسية للزمر التبديلية المنتهية.

**مثال ١.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية و $p$ عدد أولي.

١- إذا كانت $(G:1)=p$ عندئذ فإن $G\approx Z_p$.

٢- إذا كانت $(G:1)=p^2$ عندئذ إما $G\approx Z_{p^2}$ أو $G\approx Z_p\oplus Z_p$.

٣- إذا كانت $(G:1)=p^3$ عندئذ فإن $G$ تمثل بأحد الجداءات المباشرة التالية:

$$G\approx Z_{p^3}$$
$$G\approx Z_{p^2}\oplus Z_p$$
$$G\approx Z_p\oplus Z_p\oplus Z_p$$

٤- إذا كانت $(G:1)=p^4$ عندئذ فإن $G$ تمثل بأحد الجداءات المباشرة التالية:

$$G\approx Z_{p^4}$$
$$G\approx Z_{p^3}\oplus Z_p$$
$$G\approx Z_{p^2}\oplus Z_{p^2}$$
$$G\approx Z_p\oplus Z_p\oplus Z_p\oplus Z_p$$

**مثال ٢.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية مرتبتها 1176. بما أن $(G:1)=1176=2^3.3.7^2$ فإن $G$ تماثل واحداً من الجداءات المباشرة التالية:

$$Z_8\oplus Z_3\oplus Z_{49}$$
$$Z_4\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_{49}$$
$$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_{49}$$
$$Z_8\oplus Z_3\oplus Z_7\oplus Z_7$$
$$Z_4\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_7\oplus Z_7$$
$$Z_2\oplus Z_2\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_7\oplus Z_7$$

**خوارزمية نشر الزمرة التبديلية المنتهية ذات المرتبة $p^n$ في مجموع مباشر.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية مرتبتها $p^n$. لنشر الزمرة $G$ في مجموع مباشر نتبع الخطوات التالية:

١ – نقوم بعملية حساب مراتب جميع عناصر الزمرة $G$.

٢ – نختار من الزمرة $G$ العنصر ذا الرتبة الأكبر وليكن $a_1$. ثم نأخذ الزمرة $G_1=\langle a_1\rangle$. لنضع $i=1$.

٣ – إذا كانت $(G:1)=(G_i:1)$ نتوقف. والا نستبدل الدليل $i$ بالدليل $i+1$.

٤ – نختار العنصر $a_i$ ذا المرتبة الأكبر. ولتكن $o(a_i)=p^k$ ويجب أن تحقق $p^k\le(G:1)/(G_{i-1}:1)$ وبحيث جميع العناصر $a_i,a_i^p,a_i^{p^2},a_i^{p^3},\cdots,a_i^{p^{k-1}}$ لا تنتمي للزمرة $G_{i-1}$ ثم نأخذ الزمرة $G_i=G_{i-1}\times\langle a_i\rangle$.

٥ – نعود إلى الخطوة رقم ٣.

كتطبيق على الخوارزمية السابقة لندرس المثال التالي:

**مثـال ٣.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية مرتبتها $2^n$.

١– نقوم بحساب مراتب جميع عناصر الزمرة $G$.

٢– لنفرض أن العنصر $a_1$ هو العنصر ذو المرتبة الأكبر في $G$ ولنفرض أن $o(a_1)=2^r$ حيث $r<n$. عندئذ نجد أن الزمرة $\langle a_1\rangle$ هي أحد معاملات المجموع المباشر للزمرة $G$.

٣– إذا كانت $\langle a_1\rangle \neq G$ نختار العنصر $a_2$ ذا المرتبة الأعظمية، وبفرض أن $o(a_2)=2^s$ وبحيث

$$2^s \le (G:1)/(G_1:1) = 2^n/2^r = 2^{n-r}$$

حيث $G_1=\langle a_1\rangle$. ومنه $s\le n-r$ وأن جميع العناصر $a_2, a_2^2, a_2^4,\cdots,a_2^{2^{s-1}}$ لا تنتمي إلى الزمرة $G_1=\langle a_1\rangle$. عندئذ تكون الزمرة $G_2=\langle a_2\rangle$ هي الحد الثاني في المجموع المباشر. إذا كان $n=r+s$ نختار العنصر $a_3$ ذا المرتبة الأكبر ولتكن $o(a_3)=2^t$ بحيث تحقق $t\le n-r-s$ وأن أياً من العناصر $a_3,a_3^2,a_3^4,\cdots,a_3^{2^{t-1}}$ لا تنتمي إلى الزمرة

$$\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle = \{a_1^i.a_2^j,\quad 0\le i<2^r,\quad 0\le j<2^s\}$$

عندئذ نجد أن $\langle a_3\rangle$ هو المعامل الآخر في النشر المطلوب. نتابع بهذا الشكل إلى أن نحصل على مجموع مباشر مرتبته تساوي مرتبة الزمرة $G$.

## ٩–٢. الزمر التبديلية منتهية التوليد.

وجدنا في الفقرة (٩–١) أن كل زمرة تبديلية ومنتهية تنشر في مجموع مباشر لعدد منته من الزمر الدوارة. يوجد صف آخر من الزمر ينشر في مجموع منته لزمر دوارة هو صف الزمر التبديلية منتهية التوليد والذي سوف ندرسه في هذه الفقرة ولأجل ذلك لابد لنا من التعريف التالي:



**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة إن المجموعة

$$\zeta(G)=\{x: x\in G; o(x)\in N^*\}$$

تشكل زمرة جزئية من الزمرة $G$ تسمى زمرة الفتل الجزئية (انظر التمرين المحلول (٣–٥)).

– إذا كان $\zeta(G)=G$ نقول عن الزمرة $G$ إنها زمرة فتل.

– إذا كان $\zeta(G)=\langle e\rangle$ نقول عن الزمرة $G$ إنها زمرة فتل حرة.

ينتج من التعريف أنه إذا كانت $\zeta(G)=G$ فإن جميع عناصر الزمرة $G$ ذو مرتبة منتهية. أما في حالة $\zeta(G)=\langle e\rangle$ فإن العنصر الوحيد في الزمرة $G$ الذي مرتبته منتهية هو العنصر الحيادي. بمعنى آخر أياً كان $x\in G$ بحيث $x\neq e$ فإن $o(x)=\infty$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ في هذه الحالة تكون غير منتهية.

أما في الحالة التي من أجلها $\zeta(G)=G$ فإن الزمرة $G$ تكون منتهية، وهذا ما سوف نبينه لاحقا، ولنبدأ بدراسة الزمر الجزئية للزمر التبديلية منتهية التوليد، وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٩–٢–١.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية التوليد ومولدة بـ $n$ عنصر. عندئذ كل زمرة جزئية من الزمرة $G$ تكون أيضا منتهية التوليد ومولدة بـ $n$ عنصر.

**البرهان.**

لنفرض أن الزمرة $G$ تبديلية وأن $G=\langle x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\rangle$ حيث $x_i\in G$ $1\le i\le n$. ولتكن $H$ زمرة جزئية من الزمرة $G$. لنورد البرهان بالاستقراء حسب $n$.

من أجل $n=1$ عندئذ تكون الزمرة $G$ دوارة وحسب المبرهنة (٣–١–٩) تكون الزمرة الجزئية $H$ دوارة، والمبرهنة صحيحة في هذه الحالة.

من أجل $n>1$. لنفرض أن المبرهنة صحيحة لأجل أية زمرة تبديلية منتهية التوليد ومولدة بـ $(n-1)$ عنصر. ولنفرض أن $N=\langle x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{n-1}\rangle$ وبما أن الزمرة

$G$ تبديلية فإن الزمرة الجزئية $N$ تكون ناظمية في $G$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن الزمرة الجزئية $H\cap N$ تكون منتهية التوليد ومولدة بـ $(n-1)$ عنصر وحسب مبرهنة التماثل الثانية فإن

$$\frac{H}{H\cap N}\approx\frac{NH}{N}\subseteq\frac{G}{N}$$

ليكن $\bar{g}\in G/N$ عندئذ $\bar{g}=gN$ وحيث $g\in G$ وبما أن $G=\langle x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\rangle$ وحسب المبرهنة (٣-١-١٢) فإن $g=x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.x_3^{\alpha_3}.\cdots.x_n^{\alpha_n}$ حيث $\alpha_i\in Z,1\le i\le n$. وبما أن $x_1^{\alpha_1},x_2^{\alpha_2},x_3^{\alpha_3},\cdots,x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\in N$ نجد أن

$$\bar{g}=gN=(x_1^{\alpha_1},x_2^{\alpha_2},x_3^{\alpha_3},\cdots,x_n^{\alpha_n})N=x_n^{\alpha_n}N=(x_nN)^{\alpha_n}$$

وذلك أياً كان $\bar{g}\in G/N$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $G/N$ دوارة وأن $G/N=\langle x_nN\rangle$. وبما أن الزمرة $\frac{HN}{N}$ هي زمرة جزئية من الزمرة $\frac{G}{N}$ فإن الزمرة $\frac{HN}{N}$ حسب المبرهنة (٣-١-٩) تكون دوارة وبالتالي الزمرة $\frac{H}{H\cap N}$ تكون أيضا دوارة ومنه $\frac{H}{H\cap N}=\langle y(H\cap N)\rangle$ حيث $y\in H$. وبالتالي أياً كان $h\in H$ فإن

$$\bar{h}=h(H\cap N)=(y(H\cap N))^m=y^m(H\cap N)$$

حيث $m\in Z$. ومنه يوجد $z\in H\cap N$ بحيث $h=y^m z$. وبما أن الزمرة $H\cap N$ مولدة بـ $(n-1)$ عنصر من الزمرة $H$ تكون مولدة أيضا بـ $(n-1)$ عنصر بالإضافة إلى العنصر $y$. وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية $H$ مولدة بـ $n$ عنصر. ∘

لنبرهن الآن أنه إذا كانت $G$ زمرة منتهية التوليد وتحقق $\zeta(G)=G$ فإن الزمرة $G$ تكون منتهية وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٩-٢-٢.**

كل زمرة فتل منتهية التوليد و تبديلية تكون منتهية.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة فتل منتهية التوليد و تبديلية. أي $\zeta(G)=G$ ولنفرض أن

$$G=\langle x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\rangle$$

حيث $x_i\in G$ و $1\le i\le n$. البرهان سنورده بالاستقراء حسب $n$.

- من أجل $n=1$ نجد أن $G=\langle x_1\rangle$ أي أن الزمرة $G$ دوارة وبما أن $x_1\in\zeta(G)$ فإن $o(x_1)\in N^*$. لنفرض أن $o(x_1)=\alpha$ ومنه $(G:1)=o(x_1)=\alpha$ وبالتالي فإن الزمرة $G$ منتهية.
- $n>1$. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل $(n-1)$ ولنفرض أن

$$N=\langle x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{n-1}\rangle$$

وبما أن $N\subseteq G=\zeta(G)$ فإن كل عنصر من $N$ مرتبته منتهية أي أن $N=\zeta(N)$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن الزمرة $N$ تكون منتهية. لنفرض أن $(N:1)=m$.

من جهة أخرى بما أن الزمرة $G$ تبديلية فإن الزمرة $G$ ناظمية في $G$، ومنه أياً كان $\bar{g}\in G/N$ فإن $\bar{g}=gN$ حيث $g\in G$ ومنه $g=x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.x_3^{\alpha_3}.\cdots.x_n^{\alpha_n}$ حيث $\alpha_i\in Z,1\le i\le n$. وبما أن $x_1^{\alpha_1},x_2^{\alpha_2},x_3^{\alpha_3},\cdots,x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\in N$ نجد أن

$$\bar{g}=gN=(x_1^{\alpha_1},x_2^{\alpha_2},x_3^{\alpha_3},\cdots,x_n^{\alpha_n})N=x_n^{\alpha_n}N=(x_nN)^{\alpha_n}$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $G/N$ دوارة ومولدة بالعنصر $x_nN$ أي أن $G/N=\langle x_nN\rangle$.

من جهة أخرى وبما أن $x_n\in G=\zeta(G)$ فإن العنصر $x_n$ مرتبته منتهية. لنفرض أن $o(x_n)=\alpha$ عندئذ يكون لدينا $(G/N:1)=o(x_nN)=\alpha$ وبما أن $(G:1)=(G/N:1)$ وحسب مبرهنة لاغرانج نجد أن

$$(G:1)=(G:N)(N:1)=\alpha m$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ منتهية. ∘

حقيقة هامة أخرى حول هذا الموضوع نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٩-٢-٣.**

إذا كانت الزمرة $G$ تبديلية منتهية التوليد فإن الزمرة $G/\zeta(G)$ هي زمرة فتل حرة منتهية التوليد.

**البرهان.**

بما أن الزمرة $G$ تبديلية فإن الزمرة $\zeta(G)$ ناظمية وبالتالي فإن الزمرة $G/\zeta(G)$ تبديلية. لنفرض أن $G=\langle x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\rangle$ حيث $1\le i\le n, x_i\in G$. وليكن $\bar{g}\in G/\zeta(G)$ عندئذ $\bar{g}=g\zeta(G)$ حيث $g\in G$. وبما أن $g=x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.x_3^{\alpha_3}.\cdots.x_n^{\alpha_n}$ فإن

$$\bar{g}=(x_1\zeta(G))^{\alpha_1}.(x_2\zeta(G))^{\alpha_2}.\cdots.(x_n\zeta(G))^{\alpha_n}$$

ومنه فإن الزمرة $G/\zeta(G)$ منتهية التوليد ومولدة بالمجموعة

$$\{x_1\zeta(G),x_2\zeta(G),\cdots,x_n\zeta(G)\}$$

ليكن $\bar{g}\in G/\zeta(G)$ عنصراً ذا مرتبة منتهية وأن $o(\bar{g})=m$ عندئذ

$$\zeta(G)=\bar{g}^m=(g\zeta(G))^m=g^m\zeta(G)$$

ومنه $g^m\in\zeta(G)$ أي أن العنصر $g^m$ ذو مرتبة منتهية. لنفرض أن $o(g^m)=t$ عندئذ $g^{mt}=(g^m)^t=e$ وهذا يبين لنا أن $g\in\zeta(G)$ وبالتالي $\bar{g}=g\zeta(G)=\zeta(G)$ وهذا يبين لنا أن $\zeta(G/\zeta(G))=\zeta(G)$. مما سبق نجد أن الزمرة $G/\zeta(G)$ هي زمرة فتل حرة. ○

لندرس الآن مبرهنة التمثيل للزمر التبديلية منتهية التوليد.

**مبرهنة ٩-٢-٤.**

لتكن $G$ زمرة فتل حرة منتهية التوليد و تبديلية. عندئذ

١ – $G$ تماثل مجموع مباشر لزمر دوارة غير منتهية.

٢ – إذا كانت $H$ زمرة جزئية من $G$ تحقق أن $(G:H)$ منته فإن $H\approx G$.

**البرهان.**

١ – لنفرض أن الزمرة $G$ هي زمرة فتل حرة منتهية التوليد و تبديلية. من المعلوم أنه في هذه الحالة يوجد أكثر من مجموعة منتهية من $G$ تكون مولدة للزمرة $G$. لنأخذ أصغر مجموعة مولدة للزمرة $G$ ولتكن هذه المجموعة $\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$. أي أن $G=\langle x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\rangle$ وبما أن $\zeta(G)=\langle e\rangle$ فإنه أياً كان $1\le i\le n$ فإن $o(x_i)=\infty$. سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب $n$.

من أجل $n=1$ نجد أن $G=\langle x_1\rangle$ أي أن الزمرة $G$ دوارة وغير منتهية لأن $o(x_1)=\infty$ والمبرهنة صحيحة.

من أجل $n>1$ لنفرض أن المبرهنة صحيحة لأجل $(n-1)$.

ولنفرض (لأجل الحصول على تناقض) أنه في الزمرة $G$ تتحقق العلاقة $x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.\cdots.x_n^{\alpha_n}=e$ حيث $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in Z$ وأن $\alpha_n\neq 0$. ولنضع

$$K=\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle$$

فنجد أن $K$ زمرة جزئية من $G$ ومنتهية التوليد عدد مولداتها $(n-1)$ ولا توجد في $K$ مجموعات منتهية تولد $K$ قدرتها أصغر من $(n-1)$ لأنه في الحالة المعاكسة يوجد في $G$ مجموعة منتهية قدرتها أصغر من $n$ وتولد الزمرة $G$ وهذا مرفوض فرضاً. من جهة أخرى، بما أن $x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.\cdots.x_n^{\alpha_n}=e$ فإن $x_n^{\alpha_n}\in K=\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle$ وبما أن الزمرة $G$ تبديلية فإن الزمرة الجزئية $K$ تكون ناظمية في $G$ ومنه الزمرة $G/K$ تبديلية. ليكن $\bar{g}\in G/K$ عندئذ $\bar{g}=gK$ حيث $g\in G$ ومنه $g=x_1^{\beta_1}.x_2^{\beta_2}.\cdots.x_n^{\beta_n}$ حيث $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in Z$ وبما أن $x_1^{\beta_1}.x_2^{\beta_2}.\cdots.x_{n-1}^{\beta_{n-1}}\in K$ نجد أن

$$\bar{g}=gK=(x_1^{\beta_1}.x_2^{\beta_2}.\cdots.x_n^{\beta_n})K=x_n^{\beta_n}K=(x_nK)^{\beta_n}$$

وهذا يبين لنا أن $G/K=\langle x_nK\rangle$ أي أن الزمرة $G/K$ دوارة. وبما أن $x_n^{\alpha_n}\in K$ فإن

$$x_n^{\alpha_n}\in K=(x_nK)^{\alpha_n}=K$$

ومنه فإن $o(x_nK)\le|\alpha_n|$ وهذا يبين لنا أن

$$(G/K:1)=o(x_nK)\le|\alpha_n|<\infty$$

لنفرض أن $(G/K:1)=k$ عندئذ $(G:K)=k$ كما أن $k>1$ لأن $G\neq K$ ومنه $1<k\le|\alpha_n|<\infty$.

لنعرف العلاقة $\varphi:G\to K$ بالشكل التالي: أياً كان $g\in G$ فإن $\varphi(g)=g^k$. واضح أن $g^k\in K$ لأن $\bar{g}=gK\in G/K$ وبما أن $(G/K:1)=k$ فإن

$$K=\bar{g}^k=(gK)^k=g^kK$$

أي أن $g^k \in K$. كما أن $\varphi$ تطبيق لأنه أياً كان $g_1, g_2 \in G$ فإن

$$\varphi(g_1g_2) = (g_1g_2)^k = g_1^k g_2^k = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

وذلك لأن الزمرة $G$ تبديلية. كما أن $Ker\varphi = \langle e \rangle$ لأنه إذا كان $g \in Ker\varphi$ عندئذ $g \in G$ وأن $\varphi(g) = g^k$ كذلك $\varphi(g) = K$ وبالتالي $g^k = e$ أي أن $g \in \zeta(G) = \langle e \rangle$ ومنه $g = e$. لنفرض أن $\operatorname{Im}\varphi = M$ عندئذ $M \approx K$ وحسب مبرهنة التشاكل الزمري فإن $G/Ker\varphi \approx \operatorname{Im}\varphi$ أي أن $G \approx M \subseteq K \subseteq G$. وبما أن الزمرة $G$ منتهية التوليد فإن الزمرة $G/\operatorname{Im}\varphi$ منتهية التوليد وتحقق $\bar{x}^k = \bar{e}$ وذلك أياً كان $\bar{x} \in G/\operatorname{Im}\varphi$. وهذا يبين لنا أن $(G:\operatorname{Im}\varphi)$ منته نجد أن $(K:\operatorname{Im}\varphi)$ منته وذلك لأن

$$(G:M) = (G:K)(K:\operatorname{Im}\varphi)$$

وحسب الفرض الاستقرائي نجد أن $G \approx \operatorname{Im}\varphi \approx K$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ مولدة بـ $(n-1)$ عنصر مما يناقض الفرض. مما سبق نجد أنه لا توجد علاقة $x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.\cdots.x_n^{\alpha_n} = e$ من أجل $\alpha_n \neq 0$ $1 \le i \le n$. وهكذا نجد أن الزمرة $G$ تماثل مجموعاً مباشراً لعدد منته من الزمر الدوارة المنتهية.

٢ - لتكن $H$ زمرة جزئية من الزمرة $G$ تحقق $(G:H)$ منته وحسب المبرهنة (٣-١٣) فإن الزمرة $H$ تكون منتهية التوليد، وحسب المبرهنة (٩-٢-١) الزمرتين $G,H$ تملكان العدد نفسه من المولدات. لنفرض أن عدد المولدات لكل من $G,H$ هو $n$. عندئذ حسب (١) فإن

$$G \approx G_1\times G_2 \times G_3 \times\cdots\times G_n \quad \text{و} \quad H \approx H_1 \times H_2 \times H_3 \times\cdots\times H_n$$

حيث كل من $H_i, G_i$ $1\le i\le n$ زمر دوارة غير منتهية. وبما أن $H_i \approx G_i$ أياً كان $1 \le i \le n$ نجد أن $H \approx G$.

لندرس الآن تمثيل الزمر التبديلية، ولأجل ذلك لابد لنا من التعريف التالي:



**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية و $X$ مجموعة جزئية وغير خالية من $G$. نقول عن الزمرة $G$ إنها زمرة تبديلية حرة على $X$ إذا تحقق الشرط التالي: من أجل أي زمرة تبديلية $B$ ومن أجل أي تطبيق $\Theta: X\to B$ يوجد تشاكل زمري وحيد $\overline{\Theta}: G\to B$ من أجله $\overline{\Theta}(x) = \Theta(x)$ وذلك أياً كان $x\in X$.

**مبرهنة ٩-٢-٥.**

لتكن $G$ زمرة تبديلية حرة على المجموعة غير الخالية $X$. ولتكن $A$ زمرة تبديلية و $f: A\to G$ تشاكلاً زمرياً غامراً. عندئذ توجد زمرة جزئية $H$ من $A$ تماثل $G$ وتحقق $A = Kerf \times H$.

**البرهان.**

بما أن $X \subseteq G$ وأن التشاكل $f$ غامر فإنه أياً كان $x\in X$ يوجد $g_x \in A$ بحيث $f(g_x)=x$. لنأخذ المجموعة

$$S=\{g_x;\quad x\in X\}$$

فنجد أن $S\subseteq A$. لنفرض أن $H=\langle S\rangle$ ومنه فإن $H$ زمرة جزئية من $A$. لنعرف العلاقة $\varphi: X\to H$ بالشكل $\varphi(x)=g_x$ وذلك أياً كان $x\in X$. وواضح أن العلاقة $\varphi$ تطبيق. من جهة أخرى، بما أن الزمرة $A$ تبديلية فإن الزمرة $H$ تبديلية. وبما أن الزمرة $G$ هي زمرة تبديلية حرة على $X$ وأن $\varphi: X\to H$ تطبيق فإنه حسب تعريف الزمرة التبديلية الحرة على $X$ يوجد تشاكل زمري وحيد $\overline{\varphi}: G\to H$ يحقق $\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)$ وذلك أياً كان $x\in X$. كما أن التشاكل $\overline{\varphi}$ غامر لأنه أياً كان $y\in H$ فإن

$$y = g_{x_{i_1}}^{\alpha_1}.g_{x_{i_2}}^{\alpha_2}.g_{x_{i_3}}^{\alpha_3}.\cdots.g_{x_{i_k}}^{\alpha_k}$$

حيث $g_{x_{i_j}} \in S, \alpha_j\in Z$ وذلك أياً كان $1\le j\le k$. وبما أن

$$x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},\cdots,x_{i_k}\in X\subseteq G$$

فإن $x_{i_1}^{\alpha_1}.x_{i_2}^{\alpha_2}.x_{i_3}^{\alpha_3}\cdots x_{i_k}^{\alpha_k}\in G$ وأن

$$\overline{\varphi}(x_{i_1}^{\alpha_1}.x_{i_2}^{\alpha_2}.x_{i_3}^{\alpha_3}.\cdots.x_{i_n}^{\alpha_n}) = (\overline{\varphi}(x_{i_1}))^{\alpha_1}.(\overline{\varphi}(x_{i_2}))^{\alpha_2}.\cdots.(\overline{\varphi}(x_{i_k}))^{\alpha_k} =$$
$$=(\varphi(x_{i_1}))^{\alpha_1}.(\varphi(x_{i_2}))^{\alpha_2}.\cdots.(\varphi(x_{i_k}))^{\alpha_k} = g_{x_{i_1}}^{\alpha_1}.g_{x_{i_2}}^{\alpha_2}.\cdots.g_{x_{i_k}}^{\alpha_k} = y$$

لنفرض أن $\bar{f}$ هو مقصور التشاكل $f$ على $H$ فنجد أن $\bar{f}: H\to G$ تشاكل يحقق $\bar{f}(h)=f(h)$ وذلك أياً كان $h\in H$ ومنه فإن $\bar{f}\circ\overline{\varphi}: G\to G$ تشاكل زمري يحقق $\forall x\in X$ فإن

$$\bar f\circ\overline\varphi(x)=\bar f(\overline\varphi(x))=\bar f(\varphi(x))=\bar f(g_x)=f(g_x)=x$$

وبما أن الزمرة $G$ هي زمرة تبديلية حرة على $X$ فإنه من أجل أي تطبيق $\tau: X\to G$ المعرف بالشكل $\tau(x)=x$ وذلك أياً كان $x\in G$ يوجد تشاكل زمري وحيد $\bar\tau: G\to G$ من أجله $\bar\tau(x)=\tau(x)=x$ وذلك أياً كان $x\in X$ وبما أن التشاكل المطابق $I_G: G\to G$ يحقق $I_G(x)=x$ وذلك $\forall x\in X$ نجد أن $\bar\tau=I_G$ أي أن $I_G$ هو التشاكل الزمري الوحيد الذي من أجله $I_G(x)=x$ وذلك $\forall x\in X$. وبما أن $\bar f\circ\overline\varphi: G\to G$ تشاكل زمري يحقق $\forall x\in X$ فإن $\bar f\circ\overline\varphi(x)=x$ نجد أن $\bar f\circ\overline\varphi=I_G$ ومنه نجد أن التشاكل $\overline\varphi$ متباين لأنه إذا كان $y\in Ker\overline\varphi$ فإن

$$y=I_G(y)=\bar f\circ\overline\varphi(y)=\bar f(\overline\varphi(y))=\bar f(e)=e$$

مما سبق نجد أن التشاكل $\overline\varphi: G\to H$ هو تماثل أي أن $G\approx H$ وأن $H$ زمرة جزئية من $A$. من جهة أخرى، إن $\bar f\circ\overline\varphi: G\to G$ هو التشاكل المطابق على $H$ أي أن $\bar f\circ\overline\varphi=I_H$ لأنه أياً كان $y\in H$ فإن

$$y=g_{x_{i_1}}^{\alpha_1}.g_{x_{i_2}}^{\alpha_2}.g_{x_{i_3}}^{\alpha_3}.\cdots.g_{x_{i_k}}^{\alpha_k}$$

حيث $g_{x_{i_j}}\in S,\alpha_j\in Z$ وذلك أياً كان $1\le j\le k$. كما أن

$$\overline\varphi\circ\bar f(y)=\overline\varphi(\bar f(y))=\overline\varphi(\bar f(g_{x_{i_1}}^{\alpha_1}.g_{x_{i_2}}^{\alpha_2}.g_{x_{i_3}}^{\alpha_3}.\cdots.g_{x_{i_k}}^{\alpha_k}))=$$
$$=\overline\varphi[(\bar f(g_{x_{i_1}}))^{\alpha_1}.(\bar f(g_{x_{i_2}}))^{\alpha_2}.\cdots.(\bar f(g_{x_{i_k}}))^{\alpha_k}]$$

وبما أن $g_{x_{i_k}}^{\alpha_k}\in H$ فإن

$$\overline\varphi\circ\bar f(y)=\overline\varphi[(\bar f(g_{x_{i_1}}))^{\alpha_1}.(\bar f(g_{x_{i_2}}))^{\alpha_2}.\cdots.(\bar f(g_{x_{i_k}}))^{\alpha_k}]=$$
$$=\overline\varphi(x_{i_1}^{\alpha_1}.x_{i_2}^{\alpha_2}.\cdots.x_{i_k}^{\alpha_k})=(\overline\varphi(x_{i_1}))^{\alpha_1}.(\overline\varphi(x_{i_2}))^{\alpha_2}.\cdots.(\overline\varphi(x_{i_k}))^{\alpha_k}$$



وبما أن $x_{i_k}\in X$ نجد أن

$$\overline\varphi\circ\bar f(y)=(\varphi(x_{i_1}))^{\alpha_1}.(\varphi(x_{i_2}))^{\alpha_2}.\cdots.(\varphi(x_{i_k}))^{\alpha_k}=g_{x_{i_1}}^{\alpha_1}.g_{x_{i_2}}^{\alpha_2}.\cdots.g_{x_{i_k}}^{\alpha_k}=y$$

ومنه نجد أن $\overline\varphi\circ\bar f=I_H$.

لنبرهن على أن $Kerf\cap H=\langle e\rangle$. ليكن $z\in Kerf\cap H$ عندئذ $z\in H$ ومنه

$$z=I_H(z)=\overline\varphi\circ\bar f(z)=\overline\varphi(\bar f(z))=\overline\varphi(f(z))=\overline\varphi(e)=e$$

أي أن $Kerf\cap H=\langle e\rangle$. من جهة أخرى، بما أن $Kerf,H$ زمر جزئية من الزمرة التبديلية $A$ فإن $Kerf.H$ زمرة جزئية من $A$، ومنه $Kerf.H\subseteq A$. ليكن $a\in A$ عندئذ $\overline\varphi(f(a))\in H$ وبالتالي فإن $a.[\overline\varphi(f(a))]^{-1}\in A$ ومنه يوجد $b\in A$ بحيث $a.[\overline\varphi(f(a))]^{-1}=b$ ومنه فإن $a=b.[\overline\varphi(f(a))]$. من جهة أخرى فإن

$$f(a)=f(b.\overline\varphi(f(a)))=f(b).f(\overline\varphi(f(a)))=f(b).\bar f(\overline\varphi(f(a)))=$$
$$=f(b).\bar f\circ\overline\varphi(f(a))$$

وبما أن $f(a)\in G$ وأن $\bar f\circ\overline\varphi=I_G$ نجد أن $f(a)=f(b)f(a)$ وبالتالي $f(b)=e$ أي أن $b\in Kerf$. مما سبق نجد أن

$$a=b.\overline\varphi(f(a))\in Kerf.H$$

أي أن $A\subseteq Kerf.H$ وهذا يبين لنا أن $A=Kerf.H$ وبما أن $Kerf\cap H=\langle e\rangle$ نجد أن $A=Kerf\times H$ وذلك لأن كلاً من $Kerf,H$ زمر جزئية ناظمية في الزمرة التبديلية $A$. ∘

لندرس الآن متى تكون زمرة الفتل الحرة زمرة حرة وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ٩-٢-٦.**

كل زمرة فتل حرة و تبديلية هي زمرة حرة و تبديلية.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة فتل حرة منتهية التوليد و تبديلية، عندئذ حسب المبرهنة (٩-٢-٤) فإن $G$ تماثل مجموع مباشر منته لزمر دوارة غير منتهية. لنفرض أن

$$G \approx K_1 \times K_2 \times K_3 \times \cdots \times K_n$$

حيث $K_i$ زمر دوارة وغير منتهية $1 \le i \le n$.

لنأخذ المجموعة $X = \{x_i :\ 1 \le i \le n\}$ ولنبرهن على أن الزمرة $G$ هي زمرة حرة. لتكن $B$ زمرة تبديلية و $\Theta : X \to B$ تطبيق ما. وليكن $x \in G$ عندئذ العنصر $x$ يكتب بصورة وحيدة على الشكل

$$x = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.x_3^{\alpha_3}.\cdots.x_n^{\alpha_k}$$

حيث $1 \le i \le n,\ \alpha_i \in Z$. ولنعرف العلاقة $\overline{\Theta} : G \to B$ بالشكل

$$\overline{\Theta}(x) = (\Theta(x_1))^{\alpha_1}.(\Theta(x_2))^{\alpha_2}.(\Theta(x_3))^{\alpha_3}.\cdots.(\Theta(x_n))^{\alpha_n}$$

وبما أن العنصر $x$ يمثل بصورة وحيدة فإن العلاقة $\overline{\Theta}$ تطبيق وهي أيضا تشاكل لأنه إذا كان $y \in G$ فإن $y = x_1^{\beta_1}.x_2^{\beta_2}.x_3^{\beta_3}.\cdots.x_n^{\beta_n}$ ومنه

$$\overline{\Theta}(xy) = \overline{\Theta}(x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.x_3^{\alpha_3}.\cdots.x_n^{\alpha_n}.x_1^{\beta_1}.x_2^{\beta_2}.x_3^{\beta_3}.\cdots.x_n^{\beta_n}) =$$
$$= \overline{\Theta}(x_1^{\alpha_1+\beta_1}.x_2^{\alpha_2+\beta_2}.x_3^{\alpha_3+\beta_3}.\cdots.x_n^{\alpha_n+\beta_n}) =$$
$$= (\Theta(x_1))^{\alpha_1+\beta_1}.(\Theta(x_2))^{\alpha_2+\beta_2}.(\Theta(x_3))^{\alpha_3+\beta_3}.\cdots.(\Theta(x_n))^{\alpha_n+\beta_n} =$$
$$= [(\Theta(x_1))^{\alpha_1}.(\Theta(x_2))^{\alpha_2}.(\Theta(x_3))^{\alpha_3}.\cdots.(\Theta(x_n))^{\alpha_n}].$$
$$.[(\Theta(x_1))^{\beta_1}.(\Theta(x_2))^{\beta_2}.(\Theta(x_3))^{\beta_3}.\cdots.(\Theta(x_n))^{\beta_n}] = \overline{\Theta}(x).\overline{\Theta}(y)$$

أي أن التطبيق $\overline{\Theta}$ هو تشاكل. كما أنه أياً كان $x_i \in X$ فإن $\overline{\Theta}(x_i) = \Theta(x_i)$. مما سبق نجد أن الزمرة $G$ هي زمرة تبديلية حرة على $X$. ◊

نأتي الآن لإثبات صحة المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية منتهية التوليد والتي تنص على أن كل زمرة تبديلية ومنتهية التوليد هي مجموع مباشر لزمر دوارة.

**مبرهنة ٩-٢-٧.**

إذا كانت $G$ زمرة تبديلية منتهية التوليد عندئذ $G$ يمكن تمثيلها بالشكل

$$G \approx Z_{n_1} \times Z_{n_2} \times Z_{n_3} \times \cdots \times Z_{n_t} \times H$$

حيث $H$ زمرة جزئية مناسبة من $G$.

**البرهان.**



بما أن الزمرة $G$ تبديلية ومنتهية التوليد فإنه حسب المبرهنة (٩-٢-١) تكون $\zeta(G)$ زمرة منتهية التوليد (عدد مولداتها يساوي عدد مولدات الزمرة $G$) ومنه $\zeta(G)$ هي زمرة فتل حرة منتهية التوليد و تبديلية وحسب المبرهنة (٩-٢-٢) فإن الزمرة $\zeta(G)$ منتهية. أصبح لدينا $\zeta(G)$ زمرة تبديلية منتهية وحسب المبرهنة (٩-١-٧) فإن $\zeta(G)$ عبارة عن مجموع مباشر منته لزمر دوارة منتهية مرتبة كل منها قوة لعدد أولي وهذا التمثيل وحيد بغض النظر عن ترتيب الحدود في هذا المجموع. لنفرض أن

$$G \approx Z_{n_1} \times Z_{n_2} \times Z_{n_3} \times \cdots \times Z_{n_t}$$

من جهة أخرى، بما أن الزمرة $G$ تبديلية ومنتهية التوليد فإنه حسب المبرهنة(٩-٢-٣) تكون الزمرة $G/\zeta(G)$ زمرة فتل حرة منتهية التوليد وحسب التمهيدية (٩-٢-٦) نجد أن $G$ هي زمرة تبديلية حرة وحسب المبرهنة (٩-٢-٥) وبما أن $\pi : G \to G/\zeta(G)$ التشاكل الزمري القانوني الغامر فإنه توجد زمرة جزئية $H$ من $G$ وتماثل $G/\zeta(G)$ تحقق $G = Ker\pi \times H$ وبما أن $Ker\pi = \zeta(G)$ نجد أن $G = \zeta(G) \times H$ ومنه

$$G \approx Z_{n_1} \times Z_{n_2} \times Z_{n_3} \times \cdots \times Z_{n_t} \times H.$$ ◊

## تمارين محلولة ( ٩ )

١ – لتكن $G=\{1,8,12,14,18,21,27,31,34,38,44,47,51,53,57,64\}$ زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس 65. أوجد الزمر التي تماثل $G$ ثم انشر الزمرة $G$ في مجموع مباشر.

**الحل.**

بما أن $(G:1)=16$ فإن $G$ تماثل واحدة من الزمر التالية:

$$Z_{16}$$
$$Z_8 \oplus Z_2$$
$$Z_4 \oplus Z_4$$
$$Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$
$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$

ولمعرفة أي من الزمر السابقة تماثل الزمرة $G$ نقوم بحساب مراتب جميع عناصر الزمرة $G$. فنجد أن

$$o(1)=1, \quad o(14)=o(51)=o(64)=2$$
$$o(8)=o(12)=o(18)=o(21)=o(27)=o(31)=o(34)=$$
$$=o(38)=o(44)=o(47)=o(53)=o(57)=4$$

نلاحظ أن الزمرة $G$ ليست دوارة (تأكد من ذلك) وبالتالي فإن $G \not\approx Z_{16}$. وبما أن الزمرة $G$ لا تحوي سوى 3 عناصر مرتبة كل منها تساوي 2 فإن $G \not\approx Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ (علل ذلك). كذلك بما أن $G$ لا تحوي عنصر مرتبته 8 فإن $G \not\approx Z_8 \oplus Z_2$ (علل ذلك). وبما أن الزمرة $Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ تحوي فقط 8 عناصر مرتبة كل منها تساوي 4 نجد أن $G \not\approx Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ (تأكد من ذلك). مما سبق نجد أن $G \approx Z_4 \oplus Z_4$.

أما كيفية نشر الزمرة $G$ في مجموع مباشر فإننا نأخذ العنصر ذا المرتبة الأكبر، لنأخذ على سبيل المثال العنصر 8، ومنه فإن الزمرة $\langle 8\rangle=\{1,8,57,64\}$ تكون أحد معاملات النشر للزمرة $G$. ثم نختار العنصر الثاني ذا المرتبة الأكبر وليكن $a$ فنجد أن



$o(a)\le (G:1)/(\langle 8\rangle:1)=16/4=4$ أي أن $o(a)=4$ ويجب أن يحقق $a,a^2 \notin \langle 8\rangle$ فنجد أن العنصر $a=12$ يحقق هذه الخاصة. حيث $\langle 12\rangle=\{1,14,38,51\}$ ومنه نجد أن $G=\langle 8\rangle\times\langle 12\rangle$. ₀

٢ – لتكن

$$G=\{1,8,17,19,26,28,37,44,46,53,62,64,71,73,82,89,91,98,$$
$$107,109,116,118,127,134\}$$

زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس 135. أوجد الزمر التي تماثل $G$، ثم انشر الزمرة $G$ في مجموع مباشر.

**الحل.**

بما أن $(G:1)=24$ فإن الزمرة $G$ تماثل واحدة من الزمر التالية:

$$Z_8 \oplus Z_3 \approx Z_{24}$$
$$Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \approx Z_4 \oplus Z_6 \approx Z_{12} \oplus Z_2$$
$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \approx Z_6 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$

لنوجد مراتب جميع عناصر الزمرة $G$، فنجد أن

$$o(1)=1, \quad o(26)=o(109)=o(134)=2, \quad o(46)=o(91)=3$$
$$o(28)=o(53)=o(82)=o(107)=4$$
$$o(19)=o(44)=o(64)=o(71)=o(89)=o(116)=6$$
$$o(8)=o(17)=o(37)=o(62)=o(73)=o(98)=o(118)=o(127)=12$$

بما أن الزمرة $G$ ليست دوارة فإن $G \not\approx Z_{24}$، وذلك لأن $o(109)=2=o(134)$. كذلك فإن $G \not\approx Z_6 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ (علل ذلك). مما سبق نجد أن $G \approx Z_{12} \oplus Z_2$. أما كيفية نشر الزمرة $G$ في مجموع مباشر فإننا نأخذ العنصر ذا المرتبة الأكبر وليكن العنصر 8. فنجد أن $\langle 8\rangle=\{1,8,17,19,46,53,62,64,91,107,109,118\}$ وهذه الزمرة تمثل أحد معاملات النشر للزمرة $G$. ثم نختار العنصر الثاني $a$ ذا المرتبة $t$ والذي يحقق $t \le (G:1)/(\langle 8\rangle:1)=24/12=2$ من أجله $a \notin \langle 8\rangle$ فنجد أن $a=134$. ومنه تكون الزمرة $\langle 134\rangle=\{1,134\}$ هي الحد الثاني في النشر، ومنه $G=\langle 8\rangle\times\langle 134\rangle$. ₀

## تمـــــاريـــن ( ٩ )

١ – لتكن $G=\{1,9,16,22,29,53,74,79,81\}$ زمرة بالنسبة إلـى عمليـة الضـرب بالمقاس 91. أوجد الزمر التي تماثل الزمرة $G$، ثم أنشـر الزمــرة $G$ فــي مجمـوع مباشر.

٢ – لتكن $G=\{1,7,17,23,49,55,65,71\}$ زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقـاس 96. أوجد الزمر التي تماثل الزمرة $G$، ثم انشر الزمرة $G$ في مجموع مباشر.

٣ – لتكن

$$G=\{1,7,43,49,51,57,93,99,101,107,143,149,151,157,193,199\}$$

زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس 200. أوجد الزمر التي تماثل الزمرة $G$، ثم أنشر الزمرة $G$ في مجموع مباشر.

٤ – أثبت أن أي زمرة تبديلية منتهية مرتبتها 45 تحوي عنصر مرتبته 15. وهل كـل زمرة تبديلية مرتبتها 45 تحوي عنصر مرتبته 9؟.

٥ – لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية تحقق أنه من أجل أي قاسم لمرتبة الزمرة $G$ توجـد زمرة جزئية واحدة فقط في $G$. أثبت في هذه الحالة أن الزمرة $G$ دوارة.

٦ – لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية وليكن $p$ عدد أولي. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون $(G:1)=p^n$ هو أن تكون مرتبة كل عنصر من $G$ قوة للعدد الأولي $p$.

٧ – لتكن $G$ زمرة و $A,B$ زمر جزئية ناظميـة و تبديليـة فـي $G$. ولنفـرض أن $A\cap B=\langle e\rangle$. أثبت أن الجداء $A.B$ زمرة تبديلية.

٨ – لنفرض أن الزمرة $G=K\times H$. ولتكن $N$ زمرة جزئية ناظمية في $H$. أثبت أن الزمرة $N$ ناظمية في $G$.

# الفصـــــل العـــاشـــر

## الــP-زمــر ومبــرهنــات سيــلوف

في هذا الفصل سوف نورد عدداً من الطرائق التي تبين لنا العلاقة الهامة الموجودة بين بعض الزمر الجزئية لزمرة ما والزمرة الأصلية. وجـدنا مــن خــلال دراسـتنا للمرافقات اليسارية لزمرة جزئية في زمرة ما أن هذه المرافقات تشكل تجزئة للزمـــرة الأصلية. توجد طريقة أخرى للحصول على تجزئة لزمرة ما بالاعتماد على العناصـر نوردها من خلال المفهوم التالي:

### ١٠-١. الــ$P$-زمــر.

**تعريـف.**

لتكن $G$ زمرة و $a,b\in G$. نقول عن العنصرين $a,b$ إنهمــا مترافقــان إذا وجـد $x\in G$ يحقق $b=xax^{-1}$. ونقول في هذه الحالة إن العنصر $b$ هو مرافق للعنصر $a$. سوف نرمز لمجموعة العناصر من $G$ المرافقة للعنصر $a$ بــالرمز $cl(a)$ ونسـميه صف ترافق العنصر $a$. ومنه $cl(a)=\{xax^{-1}:\quad x\in G\}$.

من خلال التمهيدية التالية سوف نبين كيفية الحصول على تجزئة لزمرة مــا مــن خلال مفهوم الترافق.

**تمهيديـة ١٠-١-١.**

لتكن $G$ زمرة. لنعرف على $G$ العلاقة $\rho$ بالشكل التالي:

$$\forall a,b\in G;\quad a\rho b\Leftrightarrow \exists x\in G,\quad b=xax^{-1}$$

عندئذ: ١ – العلاقة $\rho$ المعرفة على $G$ هي علاقة تكافؤ.

٢ – صفوف تكافؤ العلاقة $\rho$ هي $cl(a)$ حيث $a\in G$.

٣ –المجموعة $\{cl(a):\quad x\in G\}$ تشكل تجزئة للزمرة $G$.

**البرهـــان.**

نتركه تمريناً للقارئ. ◦

التمهيدية التالية تعطينا خواص صفوف الترافق(التكافؤ).

**تمهيديـــة ١٠-١-٢.**

لتكن $G$ زمرة و $a \in G$. القضايا التالية متكافئة:

١ – المجموعة $C(a)=\{x : x\in G, \quad ax=xa\}$ زمرة جزئية في $G$.

٢ – بفرض أن $M_L(C(a))$ مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة $C(a)$ في $G$. عندئذ: $Cardcl(a)=CardM_L(C(a))$

٣ – $Cardcl(a)=(G:C(a))$.

**البرهـــان.**

١ – واضح أن $e\in C(a)$. ليكن $x,y\in C(a)$ عندئذ $ax=xa, ay=ya$ ومنه وبالتالي $ay^{-1}=y^{-1}a$

$$(xy^{-1})a=x(y^{-1}a)=x(ay^{-1})=(xa)y^{-1}=(ax)y^{-1}=a(xy^{-1})$$

أي أن $xy^{-1}\in C(a)$، وهذا يبين لنا أن $C(a)$ زمرة جزئية في $G$.

٢ – لنعرف العلاقة $f: cl(a)\to M_L(C(a))$ بالشكل التالي:

$$f(b=xax^{-1})=x.C(a)$$

وذلك أياً كان $b\in cl(a)$. فنجد أن $f$ تطبيق متباين، لأنه أياً كان $b,b_1\in cl(a)$ بحيث $b=b_1$ يوجد $x,x_1\in G$ بحيث $b=xax^{-1}, \quad b_1=x_1ax_1^{-1}$ وبالتالي

$$xax^{-1}=x_1ax_1^{-1}\Leftrightarrow xax^{-1}x_1=x_1a\Leftrightarrow x_1^{-1}xax^{-1}x=a\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1^{-1}x)a(x_1^{-1}x)^{-1}=a\Leftrightarrow x_1^{-1}x\in C(a)\Leftrightarrow (x_1^{-1}x).C(a)=C(a)$$
$$\Leftrightarrow x.C(a)=x_1.C(a)\Leftrightarrow f(b)=f(b_1)$$

كما أن $f$ غامر، لأنه إذا كان $\bar{y}\in M_L(C(a))$ فإن $\bar{y}=y.C(a)$ حيث $y\in G$ ومنه $yay^{-1}\in cl(a)$ وأن $f(yay^{-1})=y.C(a)=\bar{y}$. مما سبق نجد أن

$$Cardcl(a)=CardM_L(C(a)).$$

٣ –ينتج من (٢) ومن أن $CardM_L(C(a))=(G:C(a))$. ◦

بالاعتماد على التمهيديتين السابقتين نحصل على العلاقة الهامة التالية التي تسمى علاقة الصفوف وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنـــة ١٠-١-٣.**

من أجل أي زمرة منتهية $G$ العلاقة التالية $(G:1)=\sum(G:C(a))$ محققة، حيث أن المجموع في الطرف الأيمن مأخوذ على الممثلين لصفوف التكافؤ $cl(a)$.

**البرهـــان.**

وجدنا حسب التمهيدية(١٠-١-١) أن المجموعة $\{cl(a), \quad a\in G\}$ تشكل تجزئة للزمرة $G$ ومنه $(G:1)=\sum Cardcl(a)$ حيث إن المجموع في الطرف الأيمن مأخوذ على الممثلين لصفوف التكافؤ $cl(a)$. وحسب التمهيدية(١٠-١-٢) نجد أن

$$(G:1)=\sum(G:C(a)).$$ ◦

خاصة أخرى من خواص صفوف الترافق(التكافؤ) نوردها من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيديـــة ١٠-١-٤.**

لتكن $G$ زمرة و $a\in G$. الشروط التالية متكافئة:

١- $a\in Z(G)$.

٢- $Cardcl(a)=1$.

٣- $cl(a)=\{a\}$.

**البرهـــان.**

(١)⇐(٢). ليكن $a\in Z(G)$ و $x\in cl(a)$ عندئذ يوجد $g\in G$ بحيث $x=gag^{-1}$ ومنه $x=agg^{-1}=a$ أي أن $cl(a)=\{a\}$، وبالتالي $Cardcl(a)=1$. (٢)⇐(١). ليكن $g\in G$ عندئذ $gag^{-1}\in cl(a)=\{a\}$ ومنه $gag^{-1}=a$ أي أن $ga=ag$ وبالتالي $a\in Z(G)$.

(٢)⇔(٣). ينتج وبشكل مباشر من كون $a\in cl(a)$. ◦

يعد مبدأ العد أو تعداد العناصر أحد التقنيات المستخدمة في دراسة الزمر المنتهية وبالاعتماد على هذا المبدأ ندخل المفهوم التالي:

**تعريف.**

ليكن $p$ عدداً أولياً. نقول عن الزمرة المنتهية $G$ إنها $p$-زمرة إذا كانت مرتبتها قوة للعدد $p$. أي إذا كانت $(G:1)=p^n$ حيث $n\in N$.

بالاعتماد على التعريف السابق نحصل على المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١٠-١-٥.**

إذا كانت $G$ عبارة عن $p$-زمرة، عندئذ $Z(G)\neq\langle e\rangle$.

**البرهان.**

لنفرض أن $(G:1)=p^n$. بالاعتماد على علاقة الصفوف نجد أن

$$(G:1)=\sum(G:C(a))=\sum_{a\in Z(G)}(G:C(a))+\sum_{a\notin Z(G)}(G:C(a))$$

وحسب التمهيدية(١٠-١-٤) نجد

$$(G:1)=(Z(G):1)+\sum_{a\notin Z(G)}(G:C(a))$$

وبما أن

$$(G:C(a))=\frac{(G:1)}{(C(a):1)}$$

فإن $(G:C(a))=p^k$ حيث $k\geq 1$. من جهة أخرى، بما أن

$$(Z(G):1)=(G:1)-\sum_{a\notin Z(G)}(G:C(a))$$

وأن كل حد في الطرف الأيمن يقبل القسمة على $p$ فإن $(Z(G):1)$ تقبل القسمة على $p$. ولكون $Z(G)$ زمرة تبديلية فإنه حسب المبرهنة (٩-١) فإن الزمرة $Z(G)$ تحوي عنصر مرتبته $p$ وبالتالي $(Z(G):1)>1$. ∘

المبرهنة التالية تبين لنا متى تكون الزمرة تبديلية، وذلك من خلال معرفة عدد عناصرها.



**مبرهنة ١٠-١-٦.**

إذا كانت $G$ عبارة عن $p$-زمرة بحيث $(G:1)=p^2$ فإن الزمرة $G$ تكون تبديلية.

**البرهان.**

بما أن $G$ عبارة عن $p$-زمرة عندئذ حسب المبرهنة(١٠-١-٥) فإن $(Z(G):1)>1$ وحسب مبرهنة لاغرانج إما $(Z(G):1)=p$ أو $(Z(G):1)=p^2$.

إذا كانت $(Z(G):1)=p^2$ فإن $G=Z(G)$، وبالتالي فإن الزمرة $G$ تبديلية. إذا كانت $(Z(G):1)=p$ عندئذ $(G:Z(G))=p$ وبالتالي $(G/Z(G):1)=p$ أي أن الزمرة $G/Z(G)$ دوارة. وحسب المبرهنة (٥-٢-٢) تكون الزمرة $G$ تبديلية. ∘

هدفنا التالي هو دراسة خواص الـ $p$-زمر حيث إن هذه الزمر تملك العديد من الخواص الممتعة والمهمة وأولى هذه الخواص نوردها من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ١٠-١-٧.**

لتكن $G$ عبارة عن $p$-زمرة عندئذ:

١ – كل زمرة جزئية من $G$ عبارة عن $p$-زمرة.

٢ – إذا كانت $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ فإن الزمرة $\frac{G}{K}$ هي أيضاً عبارة عن $p$-زمرة.

**البرهان.**

لنفرض أن $(G:1)=p^n$ حيث $n\in N^*$.

١ – لتكن $H$ زمرة جزئية من الزمرة $G$ عندئذ حسب مبرهنة لاغرانج فإن

$$p^n=(G:1)=(G:H)(H:1)$$

وهذا يبين لنا أن $(H:1)$ تقسم المقدار $p^n$ ومنه $(H:1)=p^s$ حيث $0\leq s\leq n$ ومنه الزمرة الجزئية $H$ هي $p$-زمرة.

٢ – لتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ حسب (١) فإن $K$ عبارة عن $p$-زمرة. لنفرض أن $(K:1)=p^r$ حيث $0\leq r\leq n$ وحسب مبرهنة لاغرانج فإن

$$(\frac{G}{K}:1) = (G:K) = \frac{(G:1)}{(K:1)} = \frac{p^n}{p^r} = p^{n-r}$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $\frac{G}{K}$ هي أيضاً $p$ −زمرة. ₀

**مبرهنة ١٠ −١−٨.**

لتكن $G$ زمرة منتهية و $p$ عدداً أولياً ولتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$.
الشروط التالية متكافئة:

١ − الزمرة $G$ هي $p$ −زمرة.

٢ − كل من الزمر $K, \frac{G}{K}$ هي عبارة عن $p$ −زمر.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). ينتج من التمهيدية (١٠−١−٧).

(٢)⇐(١). لنفرض أن $(\frac{G}{K}:1) = p^r$ وأن $(K:1) = p^s$ حيث. عندئذ $n \in N^*$

$$(G:K) = (\frac{G}{K}:1) = p^r$$

ومنه حسب مبرهنة لاغرانج فإن

$$(G:1) = (G:K)(K:1) = p^r.p^s = p^{r+s}$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ عبارة عن $p$ −زمرة. ₀

## ١٠−٢. مبرهنات سيلوف.

ذكرنا سابقا أن عكس مبرهنة لاغرانج غير صحيح، أي إذا كانت $G$ زمرة منتهية مرتبتها $n$ وكان $m$ عدداً صحيحاً موجباً يقسم $n$ فإنه ليس بالضرورة وجود زمرة جزئية في $G$ مرتبتها $m$. المبرهنة التالية هي واحدة من الحالات الخاصة التي يكون فيها عكس مبرهنة لاغرانج صحيح. وأول من أثبت هذه المبرهنة هو الرياضي النرويجي $Ludwing - Sylow(1832-1918)$. وتعد كل من مبرهنتي سيلوف و لاغرانج اثنتين من أكثر النتائج أهمية في الزمر المنتهية، حيث إن المبرهنة الأولى



تعطي الشرط اللازم لوجود زمرة جزئية و الثانية تعطي الشرط الكافي لوجود تلك الزمرة الجزئية.

**مبرهنة ١٠−٢−١.(مبرهنة سيلوف الأولى ١٨٧٢).**

لتكن $G$ زمرة منتهية و $p$ عدداً أولياً. إذا كان $p^k$ يقسم مرتبة الزمرة $G$، عندئذ فإن الزمرة $G$ تحوي زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها $p^k$.

**البرهان.**

سوف نورده بالاستقراء حسب مرتبة $G$. لنفرض أن $(G:1) = p^k n$. إذا كانت $(G:1) = 1$ فإن المبرهنة صحيحة. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل جميع الزمر التي مراتبها أقل من مرتبة $G$. وهنا نميز حالتين: الحالة الأولى. يوجد في $G$ زمرة جزئية واحدة فقط $H \subset G$ تحقق أن $p^k$ يقسم مرتبة الزمرة $H$. عندئذ فإن الزمرة $H$ تحوي زمرة جزئية مرتبتها $p^k$ وبالتالي الزمرة تحوي زمرة جزئية مرتبتها $p^k$. الحالة الثانية. جميع الزمر الجزئية المحتواة تماما في $G$ مراتبها لا تقبل القسمة على $p^k$، عندئذ حسب علاقة الصفوف فإن

$$(G:1) = (Z(G):1) + \sum (G:C(a))$$

حيث إن المجموع في الطرف الأيمن(الحد الثاني) مأخوذ من أجل العناصر $a \notin Z(G)$. وبما أن $p^k$ يقسم مرتبة الزمرة $G$ وأن

$$(G:1) = (G:C(a)).(C(a):1)$$

وأن $p^k$ لا يقسم $(C(a):1)$ فإن $(G:C(a))$ يقبل القسمة على $p^k$. وذلك لأجل جميع العناصر $a \notin Z(G)$ ومنه فإن $p$ يقسم $(G:C(a))$. وبما أن

$$(Z(G):1) = (G:1) - \sum (G:C(a))$$

نجد أن $(Z(G):1)$ تقبل القسمة على $p$. ولكون $Z(G)$ زمرة تبديلية، فإنه حسب المبرهنة (٩−١) فإن الزمرة $Z(G)$ تحوي عنصر مرتبته $p$. لنرمز لهذا العنصر بالرمز $x$. بما أن $x \in Z(G)$ فإن الزمرة $\langle x \rangle$ ناظمية في $G$(أثبت ذلك). لنأخذ زمرة الخارج $G/\langle x \rangle$. بما أن

$$p^{k-1}.n = \frac{p^k n}{p} = (G/\langle x\rangle:1) = (G:\langle x\rangle) = \frac{(G:1)}{(\langle x\rangle:1)}$$

فإن $p^{k-1}$ يقسم مرتبة الزمرة $G/\langle x\rangle$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن الزمـــرة $G/\langle x\rangle$ تحوي زمرة جزئية مرتبتها $p^{k-1}$ وهذه الزمرة من الشكل $H/\langle x\rangle$ حيـث $H$ زمـرة جزئية من $G$ تحوي $\langle x\rangle$. وأن $(H/\langle x\rangle:1)=(H:\langle x\rangle)=p^{k-1}$ وهكذا فإن

$(H:1)=(H:\langle x\rangle)(\langle x\rangle:1)=p^{k-1}p=p^k$. ○

لنبين كيفية فهم مبرهنة سيلوف الأولى.

لتكن $G$ زمرة مرتبتها $2^3.3^5.5^4.7$ عندئذ فإن مبرهنة سيلوف الأولـى تخبرنـا أن الزمرة $G$ تحوي زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتهـا 5,9,3,8,4,2,25,125,625,7 بينما لا تخبرنا أي شيء عن إمكانية وجود زمرة جزئية مرتبتهـا 30,15,10,6 أو أي قاسم آخر لمرتبة الزمرة $G$ مساو لجداء عددين أوليين مختلفين. ولأن الزمر الجزئيـة التي تضمن وجودها مبرهنة سيلوف الأولى تلعب دوراً محدداً فـي نظريــة الزمــر المنتهية فإننا سوف نعطيها تسمية خاصة وذلك من خلال التعريف التالي:

**تعريـف.**

لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي $p$. إذا كان $p^k$ حيـث $k\ge 1$ يقسم مرتبة الزمرة $G$ و $p^{k+1}$ لا يقسم مرتبة الزمرة $G$ عندئذ أي زمرة جزئية من $G$ مرتبتها $p^k$ تسمى $p$ – زمرة جزئية سيلوفية من $G$.

ينتج مباشرة من التعريف أن الزمرة الجزئية $H$ من $G$ تكون $p$–زمـرة جزئيـة سيلوفية في $G$ إذا وفقط إذا كانت مرتبتها أكبر قـوة للعـدد الأولـي تقسـم مرتبـة الزمرة $G$.

بالعودة إلى الزمرة $G$ التي مرتبتها $2^3.3^5.5^4.7$ نجد أن أي زمرة جزئيـة مرتبتهـا 8 تسمى 2–زمرة جزئية سيلوفية من $G$. كذلك الزمرة الجزئيـة التـي مرتبتهـا 625 تسمى 5–زمرة جزئيـة سـيلوفية مـن $G$، والزمـرة الجزئيـة التـي مرتبتهـا 7 تسمى 7–زمرة جزئية سيلوفية من $G$ وهكذا.

كنتيجة لمبرهنة سيلوف الأولى نورد المبرهنة التالية والتي أول من أثبتها كوشـي عام ١٨٤٥وكان برهانه مؤلف، من تسع صفحات.

**مبرهنـة ١٠-٢-٢. (مبرهنة كوشي ١٨٤٥).**

لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي $p$. عندئـذ $G$ تحـوي عنصراً مرتبته $p$.

**البرهـان.**

ينتج وبشكل مباشر من المبرهنة (١٠-٢-١). ○

أيضا بالاعتماد على مبرهنة سيلوف الأولى نورد المبرهنة التالية:

**مبرهنـة ١٠-٢-٣.**

لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسـمة علـى العـدد الأولـي $p$. عندئـذ $G$ تحوي $p$ – زمرة جزئية سيلوفية.

**البرهـان.**

بما أن $p$ يقسم مرتبة الزمرة $G$، لنفرض أن $p^n$ (حيث $n\ge 1$) أكبر قوة للعـدد $p$ يقسم مرتبة الزمرة $G$. عندئذ فإن $G$ تحوي زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها $p^n$ وهذه الزمرة الجزئية هي $p$ – زمرة جزئية سيلوفية من $G$. ○

لأجل متابعة دراستنا للزمر المنتهية نحن بحاجة إلى بعـض المفـاهيم الإضـافية وبعض النتائج التي سوف نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنـة ١٠-٢-٤.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. عندئذ:

١ – من أجل أي عنصر $a\in G$ المجموعة $aHa^{-1}$ هي زمرة جزئية من $G$ تسـمى الزمرة المترافقة مع $H$ في $G$.

٢ – المجموعة $N(H)=\{a: a\in G;\quad aHa^{-1}=H\}$ زمرة جزئية من $G$ تسمى ممركز الزمرة $H$ في $G$.

٣ – الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $N(H)$.

٤ – الزمرة $N(H)$ أعظمية في مجموعة الزمر الجزئية من $G$ التي تكون فيها $H$ ناظمية.

**البرهان.**

١ – لدينا $e = aea^{-1} \in aHa^{-1}$ ومنه $aHa^{-1}$ مجموعة جزئية من $G$ وغير خالية. ليكن $x, y \in aHa^{-1}$ عندئذ $x = aha^{-1}, \quad y = aka^{-1}$ حيث $h,k \in H$ ومنه $xy^{-1} = (aha^{-1})(aka^{-1}) \in aHa^{-1}$ وهذا يبين لنا أن $aHa^{-1}$ زمرة جزئية من $G$.

٢ – لدينا $eHe^{-1} = H$ ومنه $e \in N(H)$ أي أن $N(H)$ مجموعة جزئية من $G$ وغير خالية. ليكن $a,b \in N(H)$ عندئذ $aHa^{-1} = bHb^{-1} = H$ ومنه

$$(ab^{-1})H(ab^{-1})^{-1} = a(b^{-1}Hb)a^{-1} = aHa^{-1} = H$$

أي أن $ab^{-1} \in N(H)$ وهذا يبين لنا أن $N(H)$ هي زمرة جزئية من $G$.

٣ – واضح.

٤ – حسب(٣) فإن $H$ زمرة جزئية ناظمية في $N(H)$. لتكن $K$ زمرة جزئية من $G$ بحيث $H \subseteq K$ و $H$ ناظمية في $K$. ولنفرض أن $N(H) \subseteq K \subset G$. ولنبرهن أن $K = N(H)$. ليكن $k \in K$ عندئذ $kHk^{-1} = H$ ومنه فإن $k \in N(H)$ أي أن $K \subseteq N(H)$ وهكذا فإن $K = N(H)$. وهذا يبين لنا أن الزمرة $N(H)$ أعظمية في مجموعة الزمر الجزئية من $G$ والتي تكون فيها $H$ ناظمية. ◦

لمتابعة دراستنا لمبرهنات سيلوف التي تعد أدوات قيمة في دراسة نظرية الزمر المنتهية، لابد لنا من بعض النتائج الإضافية والمفاهيم الجديدة نوردها من خلال المبرهنات التالية:

**مبرهنة ١٠-٢-٥.**

لتكن $G$ زمرة منتهية و $K$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية من $G$ مرتبتها $p^n$ (حيث $n \ge 1$). عندئذ القضايا التالية صحيحة:

١ – إذا كانت $H$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية من $G$ فإن $H \cap H(K) = H \cap K$.



٢ – أي زمرة جزئية من $G$ ومترافقة مع $K$ هي عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية في $G$.

٣ – عدد جميع الزمر الجزئية من $G$ والمترافقة مع $K$ يساوي $(G:N(K))$.

٤ – العددان $(G:N(K))$ و $p$ أوليان فيما بينهما.

**البرهان.**

١ – لدينا $K \subseteq N(K)$ ومنه $H \cap K \subseteq H \cap N(K)$. لنضع $H_1 = H \cap N(K)$. بما أن $H$ عبارة عن $p$-زمرة و $H_1 \subseteq H$ فإن $H_1$ هي أيضا $p$-زمرة جزئية من $H$. من جهة أخرى، بما أن الزمرة $K$ هي زمرة جزئية ناظمية في $N(K)$ وأن $H_1 \subseteq N(K)$ فإن

$$H_1K/K \approx H_1/(K \cap H_1)$$

وبالتالي $(H_1K:K) = (H_1:K \cap H_1)$ وبما أن

$$(H_1:1) = (H_1:K \cap H_1)(K \cap H_1:1)$$

فإن $(H_1:K \cap H_1) = p^r$ ومنه

$$(H_1K:1) = (H_1K:K)(K:1) = p^r p^n = p^{r+n}$$

وهذا يبين لنا أن $H_1K$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية من $G$ تحتوي $K$، وبما أن $K$ هي $p$-زمرة جزئية أعظمية في $G$ فإن $H_1K = K$ وبالتالي $H_1 \subseteq H_1K$ وبما أن $H_1 \subseteq H$ نستنتج أن $H_1 \subseteq H \cap K$ وهذا يبين لنا أن $H \cap H(K) = H \cap K$.

٢ – لتكن $xKx^{-1}$ زمرة مترافقة مع $K$ في $G$ حيث $x \in G$. واضح أن التطبيق $f: K \to xKx^{-1}$ المعرف بالشكل

$$\forall y \in K, \quad f(y) = xyx^{-1}$$

هو تقابل، ومنه $(K:1) = (xKx^{-1}:1)$ وهكذا نجد أن الزمرة $xKx^{-1}$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية من $G$.

٣ – لنرمز لمجموعة جميع الزمر الجزئية من $G$ والمترافقة مع $K$ بالرمز $M$، عندئذ وحسب المبرهنة (١٠-٢-٤) فإن $M = \{xKx^{-1}: \quad x \in G\}$. أيضا لنرمز

لمجموعة جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة $N(K)$ في $G$ بالرمز $M_L$، فنجد أن $M_L=\{x.N(K): \quad x\in G\}$. لنعرف العلاقة $\varphi: M_L\to M$ بالشكل التالي:

$$\forall x.N(K)\in M_L;\quad \varphi(x.N(K))=xKx^{-1}$$

فنجد أن العلاقة $\varphi$ تطبيق متباين، لأنه أياً كان $x_1.N(K),x_2.N(K)\in M_L$ فإن

$$x_1.N(K)=x_2.N(K)\Leftrightarrow x_1^{-1}x_2\in N(K)\Leftrightarrow (x_1^{-1}x_2)K(x_1^{-1}x_2)^{-1}=K\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1Kx_1^{-1}=x_2Kx_2^{-1}\Leftrightarrow \varphi(x_1N(K))=\varphi(x_2N(K))$$

واضح أن $\varphi$ غامر، ومنه فإن $\varphi$ تقابل. وهذا يبين لنا أن

$$CardM=CardM_L=(G:N(K)).$$

أي أن عدد جميع الزمر المترافقة مع $K$ في $G$ يساوي $(G:N(K))$.

٤ – بما أن $K$ عبارة عن $p$–زمرة جزئية سيلوفية في $G$ بحيث $(K:1)=p^n$ حيث $n\ge 1$ فإن $(G:1)=p^n m$ وحيث $m$ لا يقبل القسمة على $p$ وبما أن $(G:1)=(G:K)(K:1)$ نجد أن $(G:K)=m$. من جهة أخرى، بما أن

$$(G:K)=(G:N(K))(N(K):K)=m$$

فإن $(G:N(K))$ لا يقبل القسمة على $p$، وهذا يبين لنا أن العددين $p$ و $(G:N(K))$ أوليين فيما بينهما. ◦

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $H,K$ زمراً جزئية من $G$. نقول عن الزمرة $hKh^{-1}$ حيث $h\in H$ أنها $H$ – زمرة مترافقة مع $K$.

**تمهيدية ١٠-٢-٦.**

لتكن $G$ زمرة منتهية و $H,K$ زمراً جزئية من $G$. إن عدد جميع الزمر الجزئية المختلفة التي كل منها $H$–مترافقة مع $K$ يساوي $(H:H\cap N(K))$.

**البرهان.**

لنفرض أن $M=\{hKh^{-1}: \quad h\in H\}$ مجموعة جميع الزمر الجزئية المختلفة والتي كل منها $H$–مترافقة مع $K$. ولنفرض أيضا أن

$$M_L=\{h.(H\cap N(K)): \quad h\in H\}$$

مجموعة جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة $H\cap N(K)$ في $H$. ولنعرف العلاقة $\varphi: M_L\to M$ بالشكل التالي: أياً كان $h.(H\cap N(K))\in M_L$ فإن

$$\varphi(h.(H\cap N(K)))=hKh^{-1}$$

فنجد أن العلاقة $\varphi$ تطبيق متباين، لأنه أياً كان

$h_1(H\cap N(K)),h_2(H\cap N(K))\in M_L$ فإن

$$h_1(H\cap N(K))=h_2(H\cap N(K))\Leftrightarrow h_1^{-1}h_2\in H\cap N(K)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_1^{-1}h_2\in H,N(K)\Leftrightarrow (h_1^{-1}h_2)K(h_1^{-1}h_2)^{-1}=K\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_1Kh_1^{-1}=h_2Kh_2^{-1}\Leftrightarrow \varphi(h_1.(H\cap N(K)))=\varphi(h_2.(H\cap N(K)))$$

من الواضح أن التطبيق $\varphi$ غامر. بهذا الشكل نجد أن $\varphi$ تقابل ومنه

$$CardM=CardM_L=(H:H\cap N(K)) \circ$$

نأتي الآن لإثبات مبرهنة سيلوف الثانية.

**مبرهنة ١٠-٢-٧.(مبرهنة سيلوف الثانية).**

لتكن $G$ زمرة منتهية و $p$ عدداً أولياً يقسم مرتبة الزمرة $G$. عندئذ كل $p$–زمرة جزئية من $G$ تكون محتواة في $p$–زمرة جزئية سيلوفية من $G$.

**البرهان.**

لتكن $H$ عبارة عن $p$–زمرة جزئية من $G$. ولنفرض أن $(H:1)=p^n$ حيث $n\ge 1$. إذا كان $p^{n+1}$ لا يقسم مرتبة الزمرة $G$ فإن $H$ في هذه الحالة هي $p$–زمرة جزئية سيلوفية من $G$. وبذلك يتم المطلوب. لنفرض أن $p^{n+1}$ يقسم مرتبة الزمرة $G$. ولنفرض أن $p^m$ أكبر قوة للعدد $p$ يقسم مرتبة الزمرة $G$. عندئذ $m>n$ وحسب مبرهنة سيلوف الأولى توجد في $G$ زمرة جزئية $K$ مرتبتها $p^m$ وهذه الزمرة هي $p$–زمرة جزئية سيلوفية من $G$. لنفرض أن $M=\{K_x=xKx^{-1}: \quad x\in G\}$ مجموعة جميع الزمر الجزئية من $G$ والمترافقة مع $K$. وحسب المبرهنة(١٠-٢-٥) فإن كل زمرة $K_x$ هي $p$–زمرة جزئية سيلوفية من $G$ بالاضافة لذلك فإن $CardM=(G:N(K))$ والعددين $(G:N(K))$ و $p$ أوليان فيما بينهما. وبما أنه $\forall h\in H$ فإن

$$hK_xh^{-1} = hxKx^{-1}h^{-1} = (hx)K(hx)^{-1}$$

هي زمرة جزئية من $G$ ومترافقة مع $K$ وبالتالي $\forall h \in H$ فإن $hK_xh^{-1} \in M$.
لنوجد تجزئة للمجموعة $M$ بواسطة الزمرة الجزئية $H$ بالشكل التالي: $\forall h \in H$
لنأخذ المجموعة

$$M_h = \{h_0K_xh_0^{-1} = hK_xh^{-1}: \quad h_0 \in H\}$$

فنجد أن $M_h$ غير خالية، لأن $hK_xh^{-1} \in M_h$ كما أن $M_h \subseteq M$. كذلك، إذا كان $M_h \cap M_{h'} \neq \Phi$ حيث $h,h' \in H$ فإنه يوجد عنصر $A \in M_h \cap M_{h'}$ وهذا يبين لنا أن $A = hK_xh^{-1} = h'K_xh'^{-1} \in M$ لأن كلاً من $hK_xh^{-1}, h'K_xh'^{-1}$ عبارة عن زمرة جزئية من $G$ ومترافقة مع $K$. وبما أن $M$ تتألف فقط من الزمر الجزئية المترافقة مع $K$ والمختلفة ولكون $hK_xh^{-1} = h'K_xh'^{-1}$ فإن

$$(hx)K(hx)^{-1} = (h'x)K(h'x)^{-1}$$

وهذا يبين لنا أن $hx = h'x$ وبالتالي $h = h'$ أي أن $M_h = M_{h'}$. واضح أن $M = \bigcup_{h\in H} M_h$. أي أن المجموعة $\{M_h : h \in H\}$ تشكل تجزئة للمجموعة $M$ وهذه التجزئة تسمى تجزئة $M$ إلى صفوف ترافق بالنسبة إلى الزمرة الجزئية $H$. وحسب التمهيدية (١٠-٢-٦) فإن عدد جميع الزمر الجزئية $H$-المترافقة مع $K_x$ يساوي

$$(H : H \cap N(K_x)) = (H : H \cap K_x)$$

ومنه

$$(G : N(K)) = \sum_x (H : H \cap K_x)$$

وبما أن الطرف الأيسر من المساواة الأخيرة لا يقبل القسمة على $p$ وأن كل حد في الطرف الأيمن يقبل القسمة على $p$، نجد أنه توجد زمرة جزئية $K_x$ واحدة على الأقل من أجلها $(H : H \cap K_x) = 1$ وبالتالي يكون $H = H \cap K_x$ وهكذا نجد أن $H \subseteq K_x$. مما سبق نجد أن الزمرة الجزئية $H$ محتواة في $p$-زمرة جزئية سيلوفية من $G$. ۵



نأتي الآن إلى إثبات مبرهنة سيلوف الثالثة التي تعطينا عدد جميع الـ $p$-الزمر الجزئية السيلوفية في زمرة ما.

**مبرهنة ١٠-٢-٨.(مبرهنة سيلوف الثالثة).**

لتكن $G$ زمرة منتهية. عندئذ:

١ - كل $p$-زمرتين جزئيتين سيلوفيتين من $G$ مترافقتان.

٢ - عدد جميع $p$-زمر الجزئية السيلوفية المختلفة في $G$ يقسم مرتبة $G$ ويساوي $1+kp$ حيث $k \in N$.

**البرهان.**

١ - لتكن $H, K$ عبارة عن $p$-زمرتين جزئيتين سيلوفيتين من $G$. عندئذ تكون $H$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية من $G$. وحسب المبرهنة(١٠-٢-٧) فإن $H \subseteq K_x$ حيث $K_x$ زمرة جزئية من $G$ . ومترافقة مع $K$ وحسب المبرهنة(١٠-٢-٥) فإن

$$(K_x:1) = (K:1) = (H:1)$$

وهذا يبين لنا أن $H = K_x$.

٢ - لتكن $K$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية من $G$. وبما أن أي $p$-زمرة جزئية سيلوفية أخرى من $G$ تكون مترافقة مع $K$ وحسب المبرهنة(١٠-٢-٥) فإن عدد جميع $p$-الزمر الجزئية السيلوفية المختلفة في $G$ يساوي $(G:N(K))$.
لنفرض أن $K_1, K_2, K_3, \cdots, K_n$ هي جميع $p$-الزمر الجزئية السيلوفية المختلفة في $G$ والمترافقة مع $K$. عندئذ

$$(G:N(K)) = \sum (K:K\cap K_x) = (K:K\cap K_e) + \sum_{x\neq e}(K:K\cap K_x)$$

وبما أن $K_e = eKe^{-1} = K$ فإن

$$(K:K\cap K_e) = (K:K) = 1$$

ولكون $(K:K\cap K_x)$ يقبل القسمة على $p$ وذلك من أجل كل عنصر $e \neq x \in G$ فإن $\sum_{x\neq e}(K:K\cap K_x)$ يقبل القسمة على $p$ ومنه

$$(G:N(K)) = 1+kp, \quad k \in N$$ ۵

من مبرهنة سيلوف الثالثة تنتج لدينا الحقيقة الهامة التالية:

**مبرهنة ١٠-٢-٩.**

لتكن $G$ زمرة منتهية و $K$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية من $G$. القضايا التالية متكافئة:

١ – الزمرة الجزئية $K$ ناظمية في $G$.

٢ – لا يوجد في $G$ سوى $p$-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط هي $K$.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). لتكن $H$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية أخرى في $G$. وحسب المبرهنة(١١-٢-٨) فإن الزمرتين $H,K$ مترافقتان، أي يوجد $x \in G$ بحيث $H = xKx^{-1}$ ولكون $K$ ناظمية في $G$ نجد أن $H = xKx^{-1} = K$. وهذا يبين لنا أنه في $G$ توجد $p$-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط هي $K$.

(٢)⇐(١). ليكن $x \in G$ وبما أن $xKx^{-1}$ هي $p$-زمرة جزئية سيلوفية في $G$ وحسب الفرض فإن $K = xKx^{-1}$ وهذا يبين لنا أنه

$$\forall x \in G, \quad K = xKx^{-1}$$

وبالتالي الزمرة $K$ ناظمية في $G$. ∘

**تمهيدية ١٠-٢-١٠.**

لتكن $G$ و $K$ زمرة جزئية ناظمية منتهية في $G$ ولتكن $H$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية في $K$ حيث $p$ عدد أولي. عندئذ $G = K.N_G(H)$.

**البرهان.**

ليكن $g \in G$ عندئذ $gHg^{-1} \subseteq gKg^{-1} = K$ وبما أن $(gHg^{-1}:1) = (H:1)$ نجد أن $gHg^{-1}$ هي أيضا $p$-زمرة جزئية سيلوفية في $K$. وبما أن كل $p$-زمرتين سيلوفيتين مترافقتين يوجد $k \in K$ بحيث $gHg^{-1} = kHk^{-1}$ وبالتالي

$$H = k^{-1}gHg^{-1}k = (k^{-1}g)H(k^{-1}g)^{-1}$$



ومنه $k^{-1}g \in N_G(H)$ وبالتالي فإن $g \in K.N_G(H)$ وهذا يبين لنا أن $G = K.N_G(H)$. ∘

**تمهيدية ١٠-٢-١١.**

لتكن $G$ زمرة منتهية و $K$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية في $G$ حيث $p$ عدد أولي. إذا كانت $H$ زمرة جزئية من $G$ تحقق $N_G(K) \subseteq H$ عندئذ $N_G(H) = H$.

**البرهان.**

لنفرض أن $H$ زمرة جزئية من $G$ تحقق $N_G(K) \subseteq H$. بما أن $K \subseteq N_G(K) \subseteq H$ فإن $K$ هي أيضا $p$-زمرة جزئية سيلوفية في $H$. لنفرض أن $L = N_G(K)$ وحسب المبرهنة (١٠-٢-١٠) نجد أن $L = N_L(K)H$ وبما أن $N_L(K) \subseteq N_G(H) \subseteq H$ ينتج $L = H$ أي أن $N_G(H) = H$. ∘

# تمـــــاريـــن محـلـــولـــة ( ١٠ )

١- ادرس الزمرة التي مرتبتها 40.

**الحـل.**

لتكن $G$ زمرة مرتبتها 40. إن $(G:1)=2^3.5$. وحسب مبرهنة سيلوف الأولى فإن $G$ تحوي 5-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5. كما أن $G$ تحوي 2-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 8. إن عدد جميع الـ 5-زمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 5 حسب مبرهنة سيلوف الثالثة يعطى بالعلاقة $1+k5$ وهذا العدد يجب أن يقسم مرتبة الزمرة $G$. نلاحظ أنه من أجل $k\neq 0$ فإن العدد $1+k5$ لا يقسم مرتبة الزمرة $G$. ومنه توجد 5- زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط في $G$. لنرمز لهذه الزمرة بالرمز $K$. وحسب المبرهنة (١٠-٢-٩) فإن الزمرة $K$ ناظمية في $G$. لنوجد عدد جميع الـ 2-زمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 8. نلاحظ أنه من أجل $k=0,k=2$ فإن $1+k2$ يقسم مرتبة الزمرة، وبالتالي يكون لدينا عدد جميع الـ 2-زمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 8 إما 1 أو 5. لتكن $H$ إحدى هذه الزمر الجزئية التي مرتبتها 8. بما أن $K$ ناظمية في $G$ فإن الجداء $KH$ زمرة جزئية في $G$. وبما أن $K,H\subseteq KH$ فإن مرتبة الزمرة $KH$ يجب أن تقبل القسمة على 5,8 حسب مبرهنة لاغرانج. وهذا يبين لنا أن $(KH:1)=40$ مما سبق نجد أن $G=KH$ ◦.

٢- لتكن $G$ زمرة مرتبتها 15. أثبت أن الزمرة $G$ دوارة.

**الحـل.**

بما أن $(G:1)=15=3.5$ عندئذ حسب المبرهنة(١٠-٢-٣) فإن الزمرة $G$ تحوي 3-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 وأخرى 5-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5. إن عدد جميع الـ 3-زمرة الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 3 يعطى بالعلاقة $1+k3$ ويجب أن يقسم مرتبة $G$. وهنا نلاحظ أنه من أجل $k\neq 0$ فإن المقدار $1+k3$ لا يقسم مرتبة الزمرة $G$. ومنه توجد 3-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط في $G$ ولتكن $H$ وحسب المبرهنة(١٠-٢-٩) فإن الزمرة $H$ ناظمية في $G$، وبما أن $(H:1)=3$ فإن $H$ دوارة. لنفرض أن $H=\langle a\rangle$. كذلك إن عدد جميع الـ 5-زمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 5 حسب مبرهنة سيلوف الثالثة يعطى بالعلاقة $1+k5$ وهذا العدد يجب أن يقسم مرتبة الزمرة $G$. وهنا نلاحظ أنه من أجل $k\neq 0$ فإن العدد $1+k5$ لا يقسم مرتبة الزمرة $G$.
ومنه توجد 5-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط في $G$. لنرمز لهذه الزمرة بالرمز $K$، وهي ناظمية. ولكون $(K:1)=5$ فإن $K$ دوارة. لنفرض أن $K=\langle b\rangle$. بما أن $K\cap H=\langle e\rangle$ (تأكد من ذلك) وأن $aba^{-1}b^{-1}\in K\cap H=\langle e\rangle$ وذلك لكون كل من $K,H$ زمراً ناظمية في $G$ فإن $ab=ba$. من جهة أخرى، بما أن $\gcd(3,5)=1$ فإنه حسب التمرين المحلول(٣-١) فإن $o(ab)=o(a)o(b)=3.5=15$. مما سبق نجد أن $G=\langle ab\rangle$ ◦.

٣- لندرس الآن الزمرة التي مرتبتها 30.

لتكن $G$ زمرة مرتبتها 30. عندئذ $(G:1)=2.3.5$ وهنا نلاحظ أن مجموعة قواسم العدد 30 هي $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. وحسب مبرهنة سيلوف الأولى فإن الزمرة $G$ تحوي 3-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 وأخرى 5-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5. إن عدد جميع الـ 3-زمرة الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 3 يعطى بالعلاقة $1+k3$ ويجب أن يقسم مرتبة $G$. وهنا نلاحظ أنه من أجل $k\neq 0,k\neq 3$ فإن المقدار $1+k3$ لا يقسم مرتبة الزمرة $G$. ومنه يوجد في $G$ إما زمرة جزئية واحدة فقط أو 10 زمر جزئية كل منها عبارة عن 3-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3. لنرمز لإحدى هذه الزمر بالرمز $H$. من جهة أخرى فإن عدد جميع الـ 5-زمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 5 حسب مبرهنة سيلوف الثالثة يعطى بالعلاقة $1+k5$ وهذا العدد يجب أن يقسم مرتبة الزمرة $G$. وهنا نلاحظ أنه من أجل $k\neq 0,k\neq 1$ فإن العدد $1+k5$ لا يقسم مرتبة الزمرة $G$. وهذا يبين لنا أنه توجد في $G$ إما زمرة جزئية واحدة فقط أو 6 زمر جزئية كل منها عبارة عن 5-زمرة جزئية سيلوفية

مرتبتها 5 .لنرمز لإحدى هذه الزمر بالرمز $K$. وبما أن مرتبة كل من $K,H$ أعداد أولية فيما بينها نجد أن $K\cap H=\langle e\rangle$. لنتأكد من عدد الزمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 3 أو 5. لدينا الحالات التالية:

- الحالة الأولى. يوجد في $G$ عشر زمر جزئية كل منها عبارة عن 3-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3، و 6 زمر جزئية كل منها عبارة عن 5-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5.
- الحالة الثانية. يوجد في $G$ عشر زمر جزئية كل منها عبارة عن 3-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3، و 5-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها 5.
- الحالة الثالثة. يوجد 3-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها 3 في $G$، و ست زمر جزئية كل منها عبارة عن 5-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5. - الحالة الرابعة. يوجد 3-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها 3 في $G$، وأخرى عبارة عن 5-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها 5.

وهنا نلاحظ أن الحالة الأولى تقودنا إلى أن الزمرة $G$ تحوي أكثر من 30 عنصراً وبالتالي فإن هذه الحالة مرفوضة. وهذا يبين لنا أن إحدى هذه الزمر $H$ أو $K$ هي زمرة جزئية ناظمية في $G$ وبالتالي فإن الجداء $KH$ هو زمرة جزئية في $G$. وبما أن $K\cap H=\langle e\rangle$ فإن $(KH:1)=(H:1)(K:1)=3.5=15$ ومنه

$$(G:KH)=(G:1)/(HK:1)=30/15=2$$

وحسب المبرهنة (٥-١-٢) تكون الزمرة $KH$ ناظمية في $G$، وحسب التمرين (٢) فإن الزمرة $KH$ دوارة. لنفرض أن $KH=\langle y\rangle$. من جهة أخرى، بما أن 2 يقسم مرتبة الزمرة $G$ وحسب مبرهنة كوشي فإن $G$ تحوي زمرة جزئية مرتبتها 2 ولتكن $D$، ومنه تكون الزمرة $D$ دوارة. لنفرض أن $D=\langle x\rangle$. واضح أن $\langle x\rangle\cap\langle y\rangle=\langle e\rangle$. وبما أن $xy=yx$ وحسب التمرين المحلول (٣-١) فإن $o(xy)=o(x)o(y)=2.15=30$ وهذا يبين لنا أن $G=\langle xy\rangle$ أي أن الزمرة $G$ دوارة وبالتالي فهي تبديلية، كما أن $G=\{x^iy^j:\quad 0\le i\le 1;\quad 0\le j\le 14\}$.



# تمارين (١٠)

١- لتكن $G$ زمرة منتهية غير تبديلية مرتبتها 36. أثبت أن $G$ تحوي أكثر من 2-زمرة جزئية سيلوفية واحدة أو أكثر من 3- زمرة جزئية سيلوفية واحدة.

٢- لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها 48. أثبت أن تقاطع أي 2-زمرتين جزئيتين سيلوفيتين مختلفتين هو زمرة جزئية مرتبتها 8.

٣- لتكن $G$ زمرة منتهية و $K$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية من $G$ حيث $p$ عدد أولي. أثبت أنه إذا كان $x\in N(K)$ عنصر مرتبته قوة للعدد $p$ فإن $x\in K$.

٤- لتكن $G$ زمرة منتهية و $K$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية من $G$. أثبت أن $K$ هي الـ $p$-زمرة جزئية سيلوفية من $G$ الوحيدة المحتواة في $N(K)$.

٥- لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها 168. أوجد عدد الـ 7-زمرة جزئية السيلوفية من $G$.

٦- لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها 56. أثبت أن $G$ تحوي زمرة جزئية ناظمية $K$ تحقق $\langle e\rangle\ne K\subset G$.

٧- لتكن $G$ زمرة منتهية غير دوارة مرتبتها 21. أوجد عدد الـ 3- زمرة الجزئية السيلوفية في $G$. ثم أثبت أن $G$ تحوي 14 عنصراً مرتبة كل منها 3.

٨- لتكن $H$ زمرة جزئية من الزمرة $G$. أثبت أن عدد كل المرافقات اليسارية للزمرة $H$ في $G$ يساوي $(G:N(H))$.

٩- لتكن $G$ زمرة مرتبتها 375. أثبت أن الزمرة $G$ تحوي زمرة جزئية مرتبتها 15.

١٠- لتكن $G$ زمرة مرتبتها 105. أثبت أن الزمرة $G$ تحوي زمرة جزئية مرتبتها 35.

١١- لتكن $G$ زمرة مرتبتها 595. أثبت أن الزمرة $G$ تحوي 17 زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط.

١٢- لتكن $G$ زمرة منتهية و $H$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية ناظمية من $G$ حيث $p$ عدد أولي. أثبت أن $\alpha(H) = H$ وذلك أياً كان $\alpha \in Aut(H)$.

١٣- لتكن $G$ زمرة منتهية و $p$ عدد أولي. ولنفرض أن مرتبة كل عنصر من $G$ قوة للعدد $p$. أثبت أن $G$ عبارة عن $p$-زمرة.

١٤- لتكن $G$ زمرة منتهية و $H$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية في $G$ حيث $p$ عدد أولي. أثبت أن $H$ هي الـ $p$-زمرة الجزئية السيلوفية الوحيدة في $N(H)$.

١٥- لتكن $G$ زمرة تبديلية منتهية. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة $G$ دوارة هو أن تكون كل زمرة جزئية سيلوفية في $G$ دوارة.

١٦- لتكن $G$ زمرة منتهية و $p$ عدد أولي. أثبت أن

- تقاطع أي زمرتين جزئيتين من $G$ مرتبة كل منها تساوي $p$ هو $\langle e \rangle$.
- عدد جميع العناصر في $G$ التي مرتبة كل منها يساوي $p$ هو من الشكل $\alpha(p-1)$.

# الفصل الحادي عشر

## تصنيف الزمر المنتهية

وجدنا سابقا أنه من أجل أي عدد صحيح موجب $n$ توجد زمرة واحدة على الأقل مرتبتها $n$، ومن هنا نجد أن مجموعة الزمر ذات المرتبة $n$ (في الحالة العامة) يمكن اعتبارها غير منتهية، وبالتالي ليس من المعقول لدراسة هذه الزمر أن ندرس كل زمرة على حدة. من هنا نجد أنه لتصنيف الزمر من حيث المرتبة له أهمية كبيرة. فعلى سبيل المثال، بما أن كل زمرة دوارة مرتبتها $k$ تماثل $Z_k$ نستنتج أنه لدراسة الزمر الدوارة ذات المرتبة $k$ يكفي دراسة الزمرة $Z_k$. وبالاعتماد على خواص التماثل يمكننا تعميم هذه الدراسة على جميع الزمر الدوارة ذات المرتبة $k$. أي أنه يمكننا القول إنه توجد زمرة دوارة واحدة فقط مرتبتها $k$ وهي $Z_k$. وبما أن كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي $p$ هي زمرة دوارة، وبالتالي فهي تماثل $Z_k$. وهنا نستطيع القول إنه توجد لدينا زمرة واحدة فقط مرتبتها $p$ وهي $Z_p$ وذلك أياً كان العدد الأولي $p$، وبالتالي فإن نتائج دراستنا للزمرة $Z_p$ يمكن تعميمها على جميع الزمر المنتهية ذات المرتبة $p$. بالاعتماد على ما سبق ذكره سابقا نستطيع القول إنه من أجل أي عدد أولي $p$، فإن كل زمرة منتهية مرتبتها $p$ قد أصبحت معروفة لدينا. نأتي الآن لتصنيف الزمر المنتهية التي مراتبها ليست أعداداً أولية، وسوف نبدأ بالزمرة ذات المرتبة 4.

**مبرهنة ١١-١.**

كل زمرة منتهية مرتبتها 4 إما تماثل $Z_4$ أو تماثل $Z_2 \oplus Z_2$.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها 4. إذا كانت الزمرة $G$ دوارة عندئذ فإن الزمرة $G$ تماثل $Z_4$. لنفرض أن الزمرة $G$ ليست دوارة. ليكن $a \in G$ بحيث $a \neq e$ عندئذ $K = \langle a \rangle$ زمرة جزئية من $G$ مرتبتها 2 وبالتالي $K \approx Z_2$. بما أن $K \neq G$ يوجد $b \in G$ بحيث $b \notin K$ ومنه $H = \langle b \rangle$ زمرة جزئية من $G$ مرتبتها 2 وتماثل $Z_2$. وبما أن الزمرة $G$ تبديلية بالاعتماد على المبرهنة(١٠-١-٦) فإن $KH = HK$ وبالتالي الجداء $KH$ زمرة جزئية من $G$ مرتبتها 4، لأن $K \cap H = \langle e \rangle$ (تأكد من ذلك). وهذا يبين لنا أن $G = KH$. مما سبق نجد أن $G = K \times H$ وحسب المبرهنة(٨-٢-٣) فإن

$$G = K \times H \approx K \oplus H \approx Z_2 \oplus Z_2$$

وفي هذه الحالة يكون $G = \{e, a, b, ab\}$. ○

المبرهنة السابقة تبين لنا أنه توجد زمرتان فقط مرتبة كل منهما 4 هي $Z_4$ و $Z_2 \oplus Z_2$. المبرهنة التالية تعد تعميماً مباشراً للمبرهنة (١١-١) وتبين لنا أنه توجد فقط زمرتان مختلفتان مرتبة كل منهما $p^2$ وهما $Z_{p^2}$ و $Z_p \oplus Z_p$ حيث $p$ عدد أولي.

**مبرهنة ١١-٢.**

لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها $p^2$ حيث $p$ عدد أولي. عندئذ $G$ إما تماثل $Z_{p^2}$ أو تماثل $Z_p \oplus Z_p$.

**البرهان.**

إذا كانت الزمرة $G$ دوارة عندئذ $G \approx Z_{p^2}$.

لنفرض أن الزمرة $G$ ليست دوارة. بما أن $(G:1) = p^2$ فإنه بالاعتماد على المبرهنة (١٠-١-٦) تكون الزمرة $G$ تبديلية. وحسب مبرهنة كوشي فإن $G$ تحوي زمرة جزئية مرتبتها $p$ ولتكن $H$ ومنه $H \approx Z_p$. بما أن $H \neq G$ يوجد عنصر $b \in G$ بحيث $b \notin H$ ومنه فإن $K = \langle b \rangle$ زمرة جزئية من $G$ وبما أن $K \neq \langle e \rangle$ وحسب لاغرانج نجد أن $(K:1) = p$. واضح أن $K \neq H$ وأن $K \approx Z_p$. كما أن $K \cap H = \langle e \rangle$، لأنه إذا كان $K \cap H \neq \langle e \rangle$ يوجد $y \in K \cap H$ وأن $y \neq e$ ومنه فإن $\langle y \rangle$ زمرة جزئية من $K$ وحسب لاغرانج فإن $K = \langle y \rangle$. بشكل مشابه نجد أن $H = \langle y \rangle$ وهذا يبين لنا أن $K = H$ وهذا غير ممكن. وبما أن الزمرة $G$ تبديلية فإن الجداء $KH$ زمرة جزئية من $G$ وأن

$$(KH:1) = (K:1)(H:1) = p^2$$

ومنه $G = KH$. مما سبق نجد أن

$$G = K \times H \approx K \oplus H \approx Z_p \oplus Z_p.$$ ○

لندرس الآن الزمرة التي مرتبتها 6 وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١١-٣.**

كل زمرة منتهية مرتبتها 6 إما تماثل $Z_6$ أو تماثل $D_3$.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها 6. حسب مبرهنة كوشي، فإن الزمرة $G$ تحوي زمرة جزئية $H$ مرتبتها 2 وزمرة جزئية أخرى $K$ مرتبتها 3. وبما أن كلاً من 2,3 أعداد أولية فإن كلاً من $K, H$ هي زمر جزئية دوارة. لنفرض أن $H = \langle a \rangle$ وأن $K = \langle b \rangle$ وبما أن $(G:K) = (G:1)/(K:1) = 6/3 = 2$ فإنه حسب المبرهنة (٥-١-٢) تكون الزمرة $K$ ناظمية في $G$ وبالتالي يكون الجداء $KH$ زمرة جزئية من $G$. وبما أن $K \cap H = \langle e \rangle$ (تأكد من ذلك) فإن $(KH:1) = 6$ وهذا يبين لنا أن $G = KH$.

واضح أن $H = \{e, a\}$ وأن $K = \{e, b, b^2\}$ ومنه

$$G = \{e, b, b^2, a, ab, ab^2\}$$

وبما أن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ فإن $aba^{-1} \in K$ أي أن $aba^{-1} \in \{e, b, b^2\}$ ومنه إما $aba^{-1} = e$ أو $aba^{-1} = b$ أو $aba^{-1} = b^2$.

- إذا كان $aba^{-1} = e$ عندئذ $ab = a$ وبالتالي $b = e$ وهذا غير ممكن.
- إذا كان $aba^{-1} = b$ عندئذ $ab = ba$ وحسب التمرين المحلول (٣-١) نجد أن $o(ab) = 6$ أي أن $\langle ab \rangle$ زمرة جزئية من $G$ مرتبتها 6، وهذا يبين لنا أن $G = \langle ab \rangle$ وبالتالي الزمرة $G$ دوارة، ومنه $G \approx Z_6$.

- إذا كان $aba^{-1} = b^2$ عندئذ $ab = b^2a$ وفي هذه الحالة نجد أن $G \approx D_3$ حيث

$$D_3 = \langle b, a; \quad b^3 = a^2 = (ab)^2 = e \rangle$$

(راجع التمرين المحلول ٣-٩). وفي هذه الحالة نجد أن

$$G = \{e, a, b, b^2, ab, ba\}$$

مما سبق نجد أنه توجد زمرتان فقط مرتبة كل منهما 6 وهما $Z_6$ و $D_3$. ◊

نأتي الآن إلى تعميم المبرهنة الأخيرة، أي لندرس الزمرة ذات المرتبة $2p$ حيث $p$ عدد أولي.

**مبرهنة ١١-٤.**

لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها $2p$ حيث $p > 2$ عدد أولي. عندئذ إما $G$ تماثل $Z_{2p}$ أو تماثل $D_p$.

**البرهان.**

حسب مبرهنة كوشي فإن الزمرة $G$ تحوي زمرة جزئية $H$ مرتبتها 2 وزمرة جزئية أخرى $K$ مرتبتها $p$. وبما أن كلاً من $2, p$ أعداداً أولية فإن كلاً من $K, H$ هي زمر جزئية دوارة. لنفرض أن $H = \langle a \rangle$ وأن $K = \langle b \rangle$ ومنه $o(a) = 2, o(b) = p$. وبما أن

$$(G:K) = (G:1)/(K:1) = 2p/p = 2$$

فإنه حسب المبرهنة(٥-١-٢) تكون الزمرة $K$ ناظمية في $G$ وبالتالي يكون الجداء $KH$ زمرة جزئية من $G$. كما أن $K \cap H = \langle e \rangle$، لأنه إذا كان $K \cap H \neq \langle e \rangle$ يوجد $y \in K \cap H$ وأن $y \neq e$ ولكون $y \in H$ فإن $y = a$ وبالتالي $o(y) = 2$. من جهة أخرى، بما أن $y \in K$ فإن $y^p = e$ وهذا يبين لنا أن 2 يقسم $p$ وهذا مرفوض فرضا. ومنه

$$(KH:1) = (K:1)(H:1) = 2p$$

وهكذا نجد أن $G = KH$. وبما أن الزمرة $K$ ناظمية في $G$، عندئذ $aba^{-1} = a^k$ حيث $0 \le k \le p$. إذا كان $k = 0$ عندئذ $aba^{-1} = e$ ومنه $ab = a$، وهذا يبين لنا أن $a = a^2 = e$ وهذا مرفوض فرضا. كذلك الأمر إذا كان $k = p$. مما سبق نجد أن $1 \le k < p$ ومنه

$$a^{k^2} = (b^k)^k = (aba^{-1})^k = ab^k a^{-1} = a^2 b (a^{-1})^2 = b$$

وبالتالي $b^{k^2-1} = e$ وهذا يبين لنا أن $p$ يقسم المقدار $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$، وبما أن $0 \le k \le p$ نستنتج أنه إما $p = k+1$ أو $k - 1 = 0$. إذا كان $k - 1 = 0$ عندئذ $k = 1$ ومنه $ab = ba$، وبما أن $\gcd(2, p) = 1$ فإنه حسب التمرين المحلول(٣-١) نجد

$$o(ab) = o(a)o(b) = 2p$$

وهذا يبين لنا أن $G = \langle ab \rangle$ أي أن الزمرة $G$ دوارة مرتبتها $2p$ وبالتالي فإن $G$ تماثل $Z_{2p}$. لنفرض أن $p = k+1$ عندئذ $k = p-1$ ومنه $aba^{-1} = a^{p-1}$. من جهة أخرى، بما أن $G = KH$ فإن $G = \{e, a, b, ab, ab^2, ab^3, \cdots, ab^{p-1}\}$ أي أن $G = \{a^i b^j : \quad 0 \le i < 2; \quad 0 \le j < p\}$ وهذا يبين لنا أن $G \approx D_p$. ◊

المبرهنة الأخيرة بينت لنا أنه إذا كان $p$ عدداً أولياً فردياً فإنه توجد زمرتان فقط من المرتبة $2p$ وهما $2p$ و $D_p$. نأتي الآن لدراسة الزمرة التي مرتبتها $pq$ حيث $p,q$ أعداد أولية. إن أول من درس هذه الزمرة $E.Netto - 1882$ حيث أثبت من خلال دراسته هذه أنه توجد على الأكثر زمرتان مرتبة كل منهما $pq$. من خلال المبرهنة التالية سوف ندرس الحالة الخاصة التي من أجلها توجد زمرة واحدة فقط مرتبتها $pq$ وهي $Z_{pq}$.

**مبرهنة ١١-٥.**

لتكن $G$ زمرة مرتبتها $pq$ حيث $p,q$ أعداد أولية تحقق $p < q$ وأن $p$ لا يقسم $q-1$. عندئذ تكون الزمرة $G$ دوارة وبالتالي فهي تماثل $Z_{pq}$.

**البرهان.**

بما أن $p,q$ أعداد أولية تحقق $p < q$ وأن $p$ لا يقسم $q-1$ فإن $2 < p < q$ وأن $\gcd(p,q) = 1$. كما أن مجموعة قوا سم العدد $pq$ هي $\{1, p, q, pq\}$. بما أن $(G:1) = pq$ فإنه حسب المبرهنة(١٠-٢-٣) فإن $G$ تحوي $p$-زمرة جزئية

سيلوفية مرتبتها $p$ ولتكن $H$، كذلك $G$ تحوي $q$-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها $q$ ولتكن $K$. إن كلاً من $K,H$ هي زمر جزئية دوارة. لنفرض أن $H=\langle x\rangle$ وأن $K=\langle y\rangle$. وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة فإن عدد جميع الـ $p$-زمرة الجزئية السيلوفية في $G$ يساوي $1+pk$ ويقسم $pq$ أي أن

$$1+pk\in\{1,p,q,pq\}$$

وهذا يبين لنا أن $k=0$ وبالتالي فإن $G$ تحوي $p$ - زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط ومنه تكون الزمرة $H$ ناظمية في $G$.بشكل مشابه نجد أن $G$ تحوي $q$ - زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها $q$ وبالتالي تكون الزمرة $K$ أيضا ناظمية في $G$ وهذا يبين لنا أن الجداء $KH$ زمرة جزئية من $G$. كما أن $K\cap H=\langle e\rangle$ لأنه إذا كان $a\in K\cap H$ عنصر مرتبته $s$ عندئذ، بما أن $a\in K,a\in H$ فإن $s$ يكون قاسما مشتركا لكل من $p,q$ وحسب الفرض نجد أن $a=e$. وبما أن كلا من $K,H$ زمر ناظمية في $G$ فإن $xyx^{-1}y^{-1}\in K\cap H$ أي أن $xyx^{-1}y^{-1}=e$ ومنه $xy=yx$ وحسب التمرين المحلول(٣-١) ينتج أن $o(xy)=o(x)o(y)=pq$ وهكذا نجد أن $\langle xy\rangle$ زمرة جزئية من $G$ مرتبتها $pq$، ومنه $G=\langle xy\rangle$، وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ دوارة وبالتالي فهي تماثل $Z_{pq}$ ∘.

لندرس الآن الزمرة ذات المرتبة $p^2.q$ حيث $p,q$ أعداد أولية مختلفة، والتي من خلالها نجد أنه توجد زمرتان فقط مرتبة كل منها $p^2.q$ وهي $Z_p\oplus Z_{pq}$, $Z_{p^2.q}$.

**مبرهنة ١١-٦.**

لتكن $G$ زمرة مرتبتها $p^2q$ حيث $p,q$ أعداد أولية مختلفة تحقق أن $p$ لا يقسم $q-1$ وأن $q$ لا يقسم $p^2-1$. عندئذ تكون الزمرة $G$ تبديلية.

**البرهان.**

نلاحظ من شروط المبرهنة أن مجموعة قواسم العدد $p^2q$ هي المجموعة $\{1,p,p^2,q,pq,p^2q\}$. وحسب المبرهنة(١٠-٢-٣) فإن الزمرة $G$ تحوي $p$-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها $p^2$ ولتكن $H$ إحدى هذه الزمر. وحسب



مبرهنة سيلوف الثالثة، فإن عدد جميع الـ $p$-زمرة الجزئية السيلوفية في $G$ يساوي $1+pk$ ويقسم $p^2q$ أي أن

$$1+pk\in\{1,p,p^2,q,pq,p^2q\}$$

وهذا يتحقق فقط من أجل $k=0$ ومنه نجد أن $H$ هي الـ $p$-زمرة الجزئية السيلوفية الوحيدة في $G$ وحسب المبرهنة(١٠-٢-٩) فإن الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$. وبما أن $(H:1)=p^2$ فإن الزمرة $H$ تكون تبديلية. من جهة أخرى، فإن $G$ تحوي $q$-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها $q$ ولتكن $K$ إحدى هذه الزمر. وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة فإن عدد جميع الـ $q$-زمرة الجزئية السيلوفية في $G$ يساوي $1+qk$ ويقسم $p^2q$ أي أن

$$1+pk\in\{1,p,p^2,q,pq,p^2q\}$$

وهذا محقق فقط من أجل $k=0$ وهذا يبين لنا أن $K$ هي الـ $q$ - زمرة الجزئية السيلوفية الوحيدة في $G$ وبالتالي تكون الزمرة $K$ ناظمية في $G$، وبما أن $(K:1)=q$ فإن الزمرة $K$ دوارة وبالتالي فهي تبديلية. كما أن $K\cap H=\langle e\rangle$ (تأكد من ذلك). مما سبق نجد أن الجداء $KH$ زمرة جزئية من $G$ وأن

$$(KH:1)=(H:1)(K:1)=p^2q$$

وهذا يبين لنا أن $G=KH$ وبالتالي $G=K\times H=K\oplus H$ وبما أن كلاً من $K,H$ تبديلية وحسب المبرهنة(٨-١-٢) فإن الزمرة $G$ تكون تبديلية. وهنا نلاحظ ما يلي:

- إذا كانت الزمرة $G$ دوارة فإن $G\approx Z_{p^2q}$.
- إذا لم تكن الزمرة $G$ دوارة وبما أن الزمرة $K$ دوارة مرتبتها $q$ فإن $K\approx Z_q$. من جهة أخرى، بما أن الزمرة $H$ تبديلية ومرتبتها $p^2$ فإنه حسب المبرهنة(٩-٧) فإن $H\approx Z_p\oplus Z_p$. مما سبق نجد أن

$$G\approx Z_p\oplus Z_p\oplus Z_q\approx Z_p\oplus Z_{pq}$$ ∘.

لندرس الآن الزمرة ذات المرتبة $p^2q^2$ حيث $p,q$ أعداد أولية مختلفة وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١١-٧.

لتكن $G$ زمرة مرتبتها $p^2q^2$ حيث $p,q$ أعداد أولية مختلفة تحقق أن $p$ لا يقسم $q^2-1$ وأن $q$ لا يقسم $p^2-1$. عندئذ تكون الزمرة $G$ تبديلية.

**البرهان.**

نلاحظ أولاً أنه ضمن شروط المبرهنة فإن مجموعة قوا سم العدد $p^2q^2$ هي

$$\Im=\{1,p,p^2,q,q^2,pq,p^2q,pq^2,p^2q^2\}$$

وحسب المبرهنة(١٠-٢-٣) فإن الزمرة $G$ تحوي $p$-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها $p^2$ ولتكن $H$ إحدى هذه الزمر، وبما أن عدد جميع $p$-زمرة الجزئية السيلوفية في يساوي $1+pk$، ويقسم $p^2q^2$ أي أن $1+pk\in\Im$ وهذا يتحقق فقط من أجل $k=0$ ومنه نجد أن الزمرة الجزئية $H$ وحيدة في $G$. وحسب المبرهنة(١٠-٢-٩) فإن الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$. وبما أن $(H:1)=p^2$ فإن الزمرة $H$ تكون تبديلية، وحسب المبرهنة(١١-٢) إما $H\approx Z_{p^2}$ أو $H\approx Z_p\oplus Z_p$. كذلك، الزمرة $G$ تحوي $q$-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها $q^2$ ولتكن $K$ إحدى هذه الزمر، وبما أن عدد جميع الـ $q$-زمرة الجزئية السيلوفية في يساوي $1+qk$ ويقسم $p^2q^2$ أي أن $1+qk\in\Im$ وهذا يتحقق فقط من أجل $k=0$ ومنه نجد أن الزمرة الجزئية $K$ وحيدة في $G$ وبالتالي فهي ناظمية في $G$. وبما أن $(K:1)=q^2$ فإن الزمرة $K$ تكون تبديلية، ومنه إما $K\approx Z_{q^2}$ أو $K\approx Z_q\oplus Z_q$. مما سبق نجد أن الجداء $KH$ زمرة جزئية في $G$. وبما أن $K\cap H=\langle e\rangle$ نجد أن $(KH:1)=(K:1)(H:1)=p^2q^2$ وبالتالي $G=KH=K\times H\approx K\oplus H$ وبما أن كلاً من $K,H$ تبديلية فإنه حسب المبرهنة(٨-١-٢) نجد أن الزمرة $G$ تبديلية. وهنا نلاحظ مايلي:

- إذا كانت الزمرة $G$ دوارة فإن $G\approx Z_{p^2q^2}$.
- إذا لم تكن الزمرة $G$ دوارة فإن $G\approx K\oplus H\approx Z_p\oplus Z_p\oplus Z_q\oplus Z_q$ ومنه $G\approx K\oplus H\approx Z_p\oplus Z_q\oplus Z_p\oplus Z_q\approx Z_{pq}\oplus Z_{pq}$. ◊

## تمارين محلولة (١١)

١- أثبت أنه توجد أربع زمر مرتبة كل منها 66.

**الحل.**

لتكن $G$ زمرة مرتبتها 66 ولنعين الزمرة $G$. بما أن $66=2.3.11$ فإنه حسب مبرهنة كوشي $G$ تحوي 3-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 ولتكن $H$ إحدى هذه الزمر. كذلك فإن الزمرة $G$ تحوي 11-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 11 ولتكن $K$ إحدى هذه الزمر. وبما أن عدد جميع الـ11-زمر الجزئية السيلوفية يساوي $1+k.11$ ويقسم 66 نجد أن $K$ هي الـ11-زمر الجزئية السيلوفية الوحيدة في $G$ ومنه تكون الزمرة $K$ ناظمية في $G$ وبالتالي يكون الجداء $KH$ زمرة جزئية في $G$، وبما أن $K\cap H=\langle e\rangle$ نجد أن

$$(KH:1)=(K:1)(H:1)=11.3=33$$

وحسب المبرهنة(١١-٥) فإن الزمرة $KH$ دوارة. لنفرض أن $KH=\langle x\rangle$ حيث $x\in KH$. من جهة أخرى بما أن $(G:KH)=(G:1)/(KH:1)=66/33=2$ وحسب المبرهنة(٥-١-٢) فإن الزمرة $\langle x\rangle$ تكون ناظمية في $G$. كذلك، بما أن 2 يقسم مرتبة الزمرة $G$ وحسب مبرهنة كوشي، فإن الزمرة $G$ تحوي عنصراً مرتبته 2 وليكن $y$ ومنه $yxy^{-1}\in\langle x\rangle$ أي أن $yxy^{-1}=x^i$ حيث $1\le i\le 32$ وبالتالي $yx=x^iy$. وبما أن $o(x^i)=o(yxy^{-1})=o(x)$ (تأكد من ذلك) نجد أن العددين $33,i$ أوليان فيما بينهما ولكون $o(y)=2$ نجد أن

$$x=y^{-1}(yxy^{-1})y=y^{-1}x^iy=yx^iy^{-1}=(yxy^{-1})^i=(x^i)^i=x^{i^2}$$

ومنه $x^{i^2-1}=e$ وهذا يبين لنا أن 33 يقسم $i^2-1$. ومنه يوجد في $\alpha\in Z$ بحيث $i^2-1=(3\alpha)11$ أي أن $(i-1)(i+1)=(3\alpha)11$ ومنه إما 11 يقسم $i+1$ أو 11 يقسم $i-1$.

– إذا كان 11 يقسم $i+1$ عندئذ يوجد $t\in Z$ بحيث $i+1=11t$ وبما أن $1\le i\le 32$ فإن $2\le i+1\le 33$ ومنه فإن $t$ يمكن أن يأخذ القيم التالية: $t=1,2,3$ أي أن $i+1=11,22,33$ ومنه $i=10,21,32$ وبما أن العددين $33,i$ أوليان فيما بينهما نجد أن $i$ يأخذ القيم $i=10,32$.

– إذا كان 11 يقسم $i-1$ فإنه يوجد $s\in Z$ بحيث $i-1=11s$ وبما أن $0\le i-1\le 31$ نجد أن $s$ يمكن أن يأخذ القيم التالية: $s=0,1,2$ أي أن $i-1=0,11,22$ وبالتالي $i=1,12,23$ ولكون العددين $33,i$ أوليان فيما بينهما نجد أن $i=1,23$.

مما سبق نجد أن $i$ يمكن أن يأخذ القيم التالية: $i=1,10,23,32$. لنناقش بحسب قيم $i$.

– من أجل $i=1$ نجد أن $x=yxy^{-1}$ ومنه $xy=yx$ وبما أن $\langle x\rangle\cap\langle y\rangle=\langle e\rangle$ وأن $\gcd(33,2)=1$ فإنه حسب التمرين المحلول(٣-١) نجد أن

$$o(xy)=o(x)o(y)=33.2=66$$

أي أن $G=\langle xy\rangle$ وبالتالي تكون الزمرة $G$ دوارة، ويكون $G\approx Z_{66}$.

– من أجل $i=32$ نجد أن $yxy^{-1}=x^{32}$ ومنه $yx=x^{32}y$ وهكذا فإن

$$(xy)^2=x(yx)y=x(x^{32}y)y=x^{33}y^2=e$$

وفي هذه الحالة نجد أن $G\approx D_{33}$ لأن

$$D_{33}=\langle x,y:\quad x^{33}=y^2=(xy)^2=e\rangle$$

ومنه

$$G=\{x^jy^k:\quad 0\le j<33,\quad 0\le k<2\}$$

بشكل مشابه نجد أنه من أجل $i=23,i=32$ فإن الزمرة تماثل كلاً من $D_{11}\oplus Z_3$ و $D_3\oplus Z_{11}$ وأن كلا من الزمر $D_3\oplus Z_{11}$، $D_{11}\oplus Z_3$، $D_{33}$، $Z_{11}$ مرتبتها 66 وأن أي اثنتين من هذه الزمرة غير متماثلة. ₒ

٢ – كل زمرة مرتبتها 255 هي زمرة دوارة.

**الحل.**



لتكن $G$ زمرة مرتبتها 255. إن $255=3.5.17$ وحسب مبرهنة سيلوف الأولى في $G$ يوجد 17–زمرة جزئية سيلوفية، ولتكن $H$ وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة فإن $H$ هي الـ 17–زمرة الجزئية الوحيدة في $G$، وبالتالي الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$، أي أن $G=N(H)$. وحسب التمرين المحلول (٧-٢)، فإن الزمرة $\frac{N(H)}{C(H)}$ تماثل زمرة جزئية من الزمرة $Aut(H)$. أي أن المقدار $(\frac{N(H)}{C(H)}:1)$ يقسم $(Aut(H):1)$ وبما أن $G=N(H)$ فإن

$$(\frac{N(H)}{C(H)}:1)=(\frac{G}{C(H)}:1)=(G:C(H))$$

ويقسم مرتبة الزمرة $G$. من جهة أخرى، بما أن $(H:1)=17$ فإن الزمرة $H$ هي زمرة دوارة ومنه $H\approx Z_{17}$ وبالتالي حسب المبرهنة (٧-٥) فإن

$$Aut(H)\approx Aut(Z_{17})\approx U(17)$$

وبما أن $(G:C(H))$ يقسم $(Aut(H):1)$ فإن $(G:C(H))$ يقسم $U(17)=16$ وهكذا نجد أن $(G:C(H))$ يقسم 16,255 وبما أن $\gcd(16,255)=1$ نجد أن $(G:C(H))=1$ وهذا يبين لنا أن $G=C(H)$ أي أن

$$\forall h\in H;hg=gh,\quad \forall g\in G$$

ومنه $H\subseteq Z(G)$ وبالتالي فإن 17 يقسم $(Z(G):1)$. من جهة أخرى، إن $(Z(G):1)$ تقسم $255=3.5.17$ وهذا يبين لنا أن $(Z(G):1)\in\{17,51,85,255\}$ أي أن

$$(\frac{G}{Z(G)}:1)\in\{1,3,5,15\}$$

وبما أن كل زمرة مرتبتها تنتمي إلى المجموعة $\{1,3,5,15\}$ هي زمرة دوارة نجد أن الزمرة $\frac{G}{Z(G)}$ هي زمرة دوارة وبالتالي فإن الزمرة $G$ تبديلية. وحسب المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية المنتهية فإن $G\approx Z_3\oplus Z_5\oplus Z_{17}$ وحسب المبرهنة (٨-١-٥) نجد أن الزمرة $G$ دوارة أي أن $G\approx Z_{255}$. ₒ

## تمارين ( ١١ )

١- أثبت أن الزمرة المنتهية التي مرتبتها 175 تكون تبديلية.

٢- لتكن $G$ زمرة مرتبتها 60. أثبت أن $G$ تحوي بالتحديد أربعة عناصر مرتبة كل منها 5 أو 24 عنصراً مرتبة كل منها 5.

٣- لتكن $G$ زمرة مرتبتها 60. أثبت أن $(Z(G):1)\neq 4$.

٤- لتكن $G$ زمرة مرتبتها 60 و $N$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ مرتبتها 2. أثبت أن:

- الزمرة $G$ تحوي زمر جزئية ناظمية مراتبها 6 و 10 و 30.
- الزمرة $G$ تحوي زمر جزئية مراتبها 12 و 30.
- الزمرة $G$ تحوي زمرة جزئية دوارة مرتبتها 30.

٥- لتكن $G$ زمرة مرتبتها 168. أثبت أنه إذا حوت الزمرة $G$ زمرة جزئية ناظمية مرتبتها 4 فإن $G$ تحوي زمرة جزئية ناظمية مرتبتها 28.

٦- لتكن $G$ عبارة عن $p$ -زمرة مرتبتها $p^n$. أثبت أنه من أجل كل $1\leq k\leq n$ فإن $G$ تحوي زمرة جزئية ناظمية مرتبتها $p^n$، حيث $p$ عدد أولي.

٧- لتكن $G$ زمرة مرتبتها $p^n$ حيث $p$ عدد أولي وتحقق أنه من أجل كل عدد $k$ يقسم $p^n$ فإن $G$ تحوي زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها $k$. أثبت أن الزمرة في هذه الحالة $G$ تكون دوارة.

٨- لتكن $G$ زمرة منتهية وتحقق أن جميع زمرها الجزئية السيلوفية ناظمية. أثبت أن $G$ هي جداء مباشر لزمرها الجزئية السيلوفية.

٩- لتكن $G$ زمرة منتهية و $H$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ مرتبتها $p^n$ حيث $p$ عدد أولي. أثبت أن $H$ محتواة في أي $p$ -زمرة جزئية سيلوفية من $G$.

١٠ - أثبت أن جميع الـ $p$ -زمر الجزئية السيلوفية لزمرة منتهية تكون متماثلة.

١١ - ما هو عدد التشاكلات الزمرية الغامرة من $Z_n$ إلى الزمرة $Z_n$.

١٢ - أثبت أن التطبيق $f:Z\oplus Z\to Z$ المعرف بالشكل $f(a,b)=a-b$، وذلك أياًكان $(a,b)\in Z\oplus Z$ هو تشاكل زمري ثم عين نواة هذا التشاكل.

١٣ - لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$ بحيث $(G:H)=n$. وليكن $f:G\to \overline{G}$ تشاكلاً زمرياً. أثبت أنه إذا كان $Kerf\subseteq H$ فإن دليل الزمرة $f(H)$ في $\overline{G}$ يساوي $n$.

١٤ - أثبت أن الزمرة الجزئية $H=\{(1),(12)\}$ ناظمية في الزمرة $S_3$ وأن الزمرة الجزئية $H=\{(1),(12),(34)\}$ ناظمية في $S_4$.

سوف نورد الآن جدولاً يبين لنا عدد الزمر التي مراتبها أصغر أو تساوي 100.

| المرتبة | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| العدد | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 5 | 2 | 2 | 1 | 5 | 1 |
| المرتبة | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| العدد | 2 | 1 | 14 | 1 | 5 | 1 | 5 | 2 | 2 | 1 | 15 | 2 | 2 |
| المرتبة | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| العدد | 5 | 4 | 1 | 4 | 1 | 52 | 1 | 2 | 1 | 14 | 1 | 2 | 2 |
| المرتبة | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 |
| العدد | 14 | 1 | 6 | 1 | 4 | 2 | 2 | 1 | 52 | 2 | 5 | 1 | 5 |
| المرتبة | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 |
| العدد | 1 | 15 | 2 | 13 | 2 | 2 | 1 | 13 | 1 | 2 | 4 | 267 | 1 |
| المرتبة | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 |
| العدد | 4 | 1 | 5 | 1 | 4 | 1 | 50 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 6 |
| المرتبة | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 |
| العدد | 1 | 52 | 15 | 2 | 1 | 15 | 1 | 2 | 1 | 12 | 1 | 10 | 1 |
| المرتبة | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | | | | |
| العدد | 4 | 2 | 2 | 1 | 230 | 1 | 5 | 2 | 16 | | | | |



# الفصل الثاني عشر

# الزمر القابلة للحل والزمر عديمة القوى

## ١٢-١ . الزمر القابلة للحل.

في عام ١٨٩٨ لاحظ *G. A. Miller* أنه إذا كانت الزمرة $G$ غير تبديلية فإنها تحوي عنصرين على الأقل $x, y$ يحققان $xyx^{-1}y^{-1} \neq e$، وأن لهذه العناصر تطبيقات هامة. لأجل ذلك، في هذه الفقرة سوف ندرس بعض الخصائص لهذه العناصر.

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $x, y \in G$. نسمي العنصر $xyx^{-1}y^{-1}$ مبادل العنصرين $x, y$ في $G$. ونرمز له $[x, y]$. أي $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة. ولنفرض أن $S = \{[x, y]: \quad x, y \in G\}$. نسمي الزمرة $G' = \langle S \rangle$ المشتق الأول للزمرة $G$.

ينتج من التعريف السابق أن $G' \subseteq G$ وأنه إذا كانت الزمرة $G$ تبديلية فإن $G' = \langle e \rangle$.

لتكن $G$ زمرة ولنفرض أنه تم تعين المشتق الأول $G'$. لنأخذ المجموعة

$$S' = \{[x, y]: \quad x, y \in G'\}$$

إن الزمرة $G'' = \langle S' \rangle$ تسمى المشتق الثاني للزمرة $G$ وأن $G'' \subseteq G' \subseteq G$. بشكل مشابه نعين المشتق من المرتبة $n$ وذلك $\forall n \in N^*$. ونرمز له $G^{(n)} = \langle S^{(n-1)} \rangle$ حيث $S^{(n-1)} = \{[x, y]: \quad x, y \in G^{(n-1)}\}$.

نأتي الآن لدراسة بعض الخواص لمشتق الزمرة وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنـــة ١٢-١-١.

لتكن $G$ زمرة. القضايا التالية صحيحة:

١- الزمرة الجزئية $G'$ متميزة في $G$.

٢- الزمرة الجزئية $G'$ ناظمية في $G$.

٣- الزمرة $G/G'$ تبديلية.

**البرهـــان.**

١ – لنبرهن أولاً أن الصورة المباشرة لأي مبادل وفق أي تماثل للزمـــرة $G$ هـــو أيضا مبادل للزمرة $G$. ليكن $f \in Aut(G)$ عندئذ، أياً كان $x, y \in G$ فإن

$$f(xyx^{-1}y^{-1}) = f(x)f(y)(f(x))^{-1}(f(y))^{-1} \in S$$

وبالتالي $f(S) = S$. لنبرهن الآن أن $f(G') = G'$ وذلك أياً كان $f \in Aut(G)$. ليكن $y \in f(G)$، عندئذ $y = f(x)$ حيث $x \in G'$. وحسب المبرهنة (٣-١-١٢) فإن

$$x = a_{i_1}^{s_1}.a_{i_2}^{s_2}.a_{i_3}^{s_3}.\cdots.a_{i_n}^{s_n}$$

حيث $a_{i_j} \in S$ من أجل $1 \le j \le n$ وأن $s_i \in Z$ من أجل $1 \le i \le n$. ومنه

$$y = f(x) = f(a_{i_1}^{s_1}.a_{i_2}^{s_1}.a_{i_3}^{s_3}.\cdots.a_{i_n}^{s_n}) =$$

$$= (f(a_{i_1}))^{s_1}.(f(a_{i_2}))^{s_2}.(f(a_{i_3}))^{s_3}.\cdots.(f(a_{i_n}))^{s_n}$$

وبما أن $f(a_{i_j}) \in S$ أياً كان $1 \le j \le n$ فإن $y = f(x) \in G'$. وهـــذا يبـــين لنـــا أن $f(G') \subseteq G'$. لـــيكن $z \in G'$ عندئـــذ وحســـب المبرهنـــة (٣-١-١٢) فـــإن $z = b_{j_1}^{t_1}.b_{j_2}^{t_2}.b_{j_3}^{t_3}.\cdots.a_{j_m}^{t_m}$ حيث $b_{i_j} \in S$ $t_i \in Z$ وذلك أياً كان $1 \le i \le n$. وبمـــا أن يوجد $d_{j_i} \in S$ بحيث $f(d_{j_i}) = b_{j_i}$ لأجل $1 \le j \le n$. وهكذا فإن

$$z = b_{j_1}^{t_1}.b_{j_2}^{t_2}.b_{j_3}^{t_3}.\cdots.a_{j_m}^{t_m} = (f(d_{j_1}))^{t_1}.(f(d_{j_2}))^{t_2}.(f(d_{j_3}))^{t_3}.\cdots.(f(d_{j_m}))^{t_m} =$$

$$= f(d_{j_1}^{t_1}.d_{j_2}^{t_2}.d_{j_3}^{t_3}.\cdots.d_{j_m}^{t_m}) \in f(G')$$

مما سبق نجد أن $f(G') = G'$. وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئيـــة $G'$ متميـــزة فـــي الزمرة $G$.

٢ – ينتج من المبرهنة(٨-٦).



٣ – لـــيكن $xG', yG' \in G/G'$ حيـــث $x, y \in G$. وبمـــا أن $xyx^{-1}y^{-1} \in G'$ فـــإن $(xyx^{-1}y^{-1})G' = G'$ وهذا يبين لنا أن $(xG')(yG') = (yG')(xG')$. وبالتالي الزمرة $G/G'$ تبديلية. ₀

علاقة الزمرة الجزئية $G'$ مع بعض الزمر الجزئية الناظمية نجدها فـــي المبرهنـــة التالية:

مبرهنـــة ١٢-١-٢.

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. القضايا التالية متكافئة:

١- الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في الزمرة $G$ والزمرة $G/H$ تبديلية.

٢- $G' \subseteq H$.

**البرهـــان.** (١)⇐(٢). لنبرهن أولاً أن

$$S = \{[x, y]: \quad x, y \in G\} \subseteq H$$

ليكن $[x, y] \in S$ حيث $x, y \in G$، وحسب الفـــرض فـــإن $(xH)(yH) = (yH)(xH)$ وبالتالي

$$(xH)(yH)(x^{-1}H)(y^{-1}H) = H$$

أي أن $(xyx^{-1}y^{-1})H = H$ وهذا يبين لنـــا أن $xyx^{-1}y^{-1} \in H$. ممـــا ســـبق نجـــد أن $S \subseteq H$ وبالتالي $G' = \langle S \rangle \subseteq H$.

(٢)⇐(١). لنبرهن في البداية على أن الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$. أي لنبرهن أن $gHg^{-1} \subseteq H$ وذلك أياً كان $g \in G$. ليكن $h \in H$ عندئذ أياً كان $g \in G$ فإن

$$ghg^{-1}(ghg^{-1}h^{-1})h = [g, h]h \in G'H \subseteq HH = H$$

مما سبق نجـــد أن $gHg^{-1} \subseteq H$ وبالتـــالي الزمـــرة الجزئيـــة $H$ ناظميـــة فـــي $G$.

ليكن $xH, yH \in G/H$ حيث $x, y \in G$ عندئذ

$$xyx^{-1}y^{-1} = [x, y]H \in G' \subseteq H$$

وبالتالي $(xyx^{-1}y^{-1})H = H$ أي أن $(xH)(yH) = (yH)(xH)$. وهكـــذا نجـــد أن الزمرة $G/H$ تبديلية. ₀

من الآن فصاعدا سوف نرمز للزمرة $\langle e\rangle$ بالرمز $E$. نـأتي الآن إلـى تعريـف ودراسة الزمرة القابلة للحل.

**تعريـف.**

نقول عن الزمرة $G$ إنها قابلة للحل إذا ملكت سلسلة منتهية من الزمر الجزئية مـن الشكل

$$E = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

تحقق: ١ – الزمرة الجزئية $G_{i+1}$ ناظمية في الزمرة $G_i$ حيث $i = 0,1,2,\cdots(n-1)$.

٢ –الزمرة $G_i/G_{i+1}$ تبديلية من أجل $i = 0,1,2,\cdots(n-1)$.

ينتج من التعريف مباشرة أن كل زمرة تبديلية تكون قابلـة للحـل، لأنها تملك السلسلة $G = \langle e\rangle$. وهذا يبين لنا أن صف الزمر التبديلية محتوى فـي صـف الزمـر القابلة للحل، ولذلك يعد صف الزمر القابلة للحل أعم من صف الزمر التبديلية، ويـأتي في المرتبة الثانية من حيث أهميته ودراسته بعد صف الزمر التبديلية. نأتي الآن إلـى دراسة الزمر القابلة للحل وزمرة الخارج لها.

**مبرهنـة ١٢-١-٣.**

لتكن $G$ زمرة قابلة للحل. عندئذ

١ – أي زمرة جزئية من $G$ تكون قابلة للحل.

٢ – إذا كانت $N$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ عندئذ الزمرة $G/N$ تكون أيضاً قابلـة للحل.

**البرهـان.**

بما أن الزمرة $G$ قابلة للحل عندئذ فإن الزمرة $G$ تملك سلسلة منتهية مـن الزمـر الجزئية من الشكل

$$E = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

تحقق أن الزمرة الجزئية $G_{i+1}$ ناظمية في الزمرة $G_i$ وأن الزمرة $G_i/G_{i+1}$ تبديلية من أجل $i = 0,1,2,\cdots(n-1)$.

١ – لـتكن $H$ زمـرة جزئيـة مـن الزمـرة $G$ ولنضـع $H_i = H\cap G_i$ حيـث $i = 0,1,2,\cdots n$. عندئذ نحصل على سلسلة منتهية من الزمر الجزئية $H_i$ من الزمـرة $H$ وهي

$$E = H_n \subseteq H_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq H_1 \subseteq H_0 = H$$

لنبـرهن علـى أن الزمـرة الجزئيـة $H_{i+1}$ ناظميـة فـي الزمـرة $H_i$ حيـث $i = 0,1,2,\cdots(n-1)$. ليكن $y\in g_iH_{i+1}g_i^{-1}$ وذلك أياً كان $g_i\in H_i$، عندئـذ يوجـد $h_{i+1}\in H_{i+1}$ بحيث $y = g_ih_{i+1}g_i^{-1}$ وبمـا أن $H_i\subseteq G_i$ مـن أجـل $1\le i\le n$ وأن الزمرة $G_{i+1}$ ناظمية في الزمرة $G_i$ نجد أن $y\in G_{i+1}$ كذلك $y\in H$ ممـا سـبق نجـد أن $y\in H\cap G_{i+1} = H_{i+1}$. بهذا الشـكل نجـد أن $g_iH_{i+1}g_i^{-1}\subseteq H_{i+1}$ وذلـك أيـاً كان $g_i\in H_i$. وبالتـالي تكـون الزمـرة $H_{i+1}$ ناظميـة فـي الزمـرة $H_i$ حيـث $i = 0,1,2,\cdots(n-1)$. من جهة أخرى، وبالاعتماد على نظرية التماثل الثانية نجد أن

$$\frac{H_i}{H_{i+1}} = \frac{G_i\cap H}{G_{i+1}\cap H} = \frac{G_i\cap H}{G_{i+1}\cap(G_i\cap H)} \approx \frac{G_{i+1}(G_i\cap H)}{G_{i+1}} \subseteq \frac{G_i}{G_{i+1}}$$

وبما أن زمرة الخـارج $G_i/G_{i+1}$ تبديلية فرضا، فإن زمرة الخـارج $H_i/H_{i+1}$ تكـون أيضا تبديلية، وذلك أياً كان $i = 0,1,2,\cdots(n-1)$. مما سبق نجد أن الزمـرة $H$ قابلـة للحل.

٢ – لتكن $N$ زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $G$. عندئذ فـإن الجـداء $G_iN$ زمـرة جزئية في $G$، وبما أن $N\subseteq G_iN$ وأن $N$ ناظمية في $G$ نجد أن الزمرة $N$ ناظميـة فـي $G_iN$ وبالتـالي $\frac{G_iN}{N}$ زمـرة، وذلـك أيـاً كـان $i = 0,1,2,\cdots n$. وبمـا أن $G_{i+1}N\subseteq G_iN$ فإننا نحصل على السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية مـن الزمـرة $G/N$ وهي

$$N = \frac{N}{N} = \frac{G_nN}{N} \subseteq \frac{G_{n-1}N}{N} \subseteq \frac{G_{n-2}N}{N} \subseteq \cdots \subseteq \frac{G_2N}{N} \subseteq \frac{G_1N}{N} \subseteq \frac{G_0N}{N} = \frac{G}{N}$$

لنبرهن الآن على أن الزمرة $\frac{G_{i+1}N}{N}$ ناظمية في $\frac{G_iN}{N}$. ليكن $\bar{y} \in \bar{g}_i.\frac{G_{i+1}N}{N}.\bar{g}_i^{-1}$ وذلك أياً كان $\bar{g}_i \in \frac{G_iN}{N}$. ومنه يوجد $\bar{g}_{i+1} \in \frac{G_{i+1}N}{N}$ يحقق $\bar{y} = \bar{g}_i\bar{g}_{i+1}.\bar{g}_i^{-1}$ وبالتالي

$$\bar{y} = (g_iN)(g_{i+1}N)(g_iN)^{-1} = (g_ig_{i+1}g_i^{-1})N$$

وبما أن الزمرة $G_{i+1}$ ناظمية في الزمرة $G_i$ نجد أن $g_ig_{i+1}g_i^{-1} \in G_{i+1}$ وبالتالي

$$\bar{y} = (g_ig_{i+1}g_i^{-1})N \in \frac{G_{i+1}}{N} \subseteq \frac{G_{i+1}N}{N}$$

وبالاعتماد على نظريتي التماثل الثانية والثالثة، نجد أن

$$\frac{(G_iN)/N}{(G_{i+1}N)/N} \approx \frac{G_iN}{G_{i+1}N} = \frac{G_i(G_{i+1}N)}{G_{i+1}N} \approx \frac{G_i}{G_i \cap (G_{i+1} \cap N)} \approx$$

$$\approx \frac{G_i/G_{i+1}}{(G_i \cap (G_{i+1}N))/G_{i+1}}$$

وبما أن الزمرة $G_i/G_{i+1}$ تبديلية فرضا نجد أن الزمرة

$$\frac{G_i/G_{i+1}}{(G_i \cap (G_{i+1}N))/G_{i+1}}$$

أيضا تبديلية.وبالتالي تكون الزمرة $\frac{G_iN/N}{G_{i+1}N/N}$ تبديلية.مما سبق نجد أن الزمرة $G/N$ قابلة للحل. ◦

لنورد الآن الشرط اللازم و الكافي كي تكون زمرة ما قابلة للحل وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١٢-١-٤.**

لتكن $G$ زمرة و $N$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. الشروط التالية متكافئة:

١- الزمرة $G$ قابلة للحل.

٢- الزمرتين $N$ و $G/N$ قابلتين للحل.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). ينتج وبشكل مباشر من المبرهنة(١٢-١-٣).



(٢)⇐(١). بما أن كلاً من الزمرتين $G/N, N$ قابلتان للحل فإنه توجد سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من $N$ على الشكل

$$E = N_n \subseteq N_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq N_1 \subseteq N_0 = N$$

تحقق أن الزمرة $N_{i+1}$ ناظمية في الزمرة $N_i$ وأن الزمرة $N_i/N_{i+1}$ تبديلية، حيث $i = 0,1,2,\cdots(n-1)$. وتوجد أيضا سلسلة منتهية أخرى من الزمر الجزئية من الزمرة $G/N$ على الشكل

$$N = \frac{N}{N} = \frac{G_r}{N} \subseteq \frac{G_{r-1}}{N} \subseteq \frac{G_{r-2}}{N} \subseteq \cdots \subseteq \frac{G_2}{N} \subseteq \frac{G_1}{N} \subseteq \frac{G_0}{N} = \frac{G}{N}$$

تحقق أن الزمرة $G_{i+1}/N$ ناظمية في الزمرة $G_i/N$ وأن الزمرة $\frac{G_i/N}{G_{i+1}/N}$ تبديلية، حيث $i = 0,1,2,\cdots(r-1)$. لنشكل السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية من الزمرة $G$ التالية:

$$E = N_n \subseteq N_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq N_1 \subseteq N_0 = G_r \subseteq G_{r-1} \subseteq \cdots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

واضح أن السلسلة السابقة تحقق شروط قابلية الحل.(تأكد من ذلك). ◦

من خلال المبرهنة التالية سوف ندرس العلاقة بين مشتقات زمرة ما، وقابلية هذه الزمرة للحل.

**مبرهنة ١٢-١-٥.**

من أجل أي زمرة $G$، القضايا التالية متكافئة:

١- الزمرة $G$ قابلة للحل.

٢- يوجد $n \in N^*$ بحيث $G^{(n)} = E$.

**البرهان.**

(١)⇐(٢).لنفرض أن الزمرة $G$ قابلة للحل، عندئذ فإن الزمرة $G$ تملك سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من $G$ على الشكل

$$E = G_m \subseteq G_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

تحقق أن الزمرة الجزئية $G_{i+1}$ ناظمية في $G_i$ وأن الزمـــرة $G_i / G_{i+1}$ تبديليـــة، حيـــث $i = 0,1,2,\cdots(m-1)$. لنبرهن بالاستقراء على أن $G^{(i)} \subseteq G_{i+1}$ وذلك أياً كان $i$. من أجـــل $i=1$، لـــدينا $G_2 \subseteq G_1 = G$ وبمـــا أن الزمـــرة $G_2$ ناظميـــة فـــي $G_1$ وأن الزمرة $G_1/G_2$ تبديلية فإنه حسب المبرهنـــة(١٢-١-٢) نجـــد أن $G' = G_1' \subseteq G_2$.
لنفرض أن العلاقة $G^{(i)} \subseteq G_{i+1}$ صحيحة من أجل $(i-1)$ ولنبرهن على صحتها مـــن أجل $i$. أصبح لدينا $G^{(i-1)} \subseteq G_i$ وبما أن $G_{i+1} \subseteq G_i$ وأن الزمرة $G_{i+1}$ ناظمية في $G_i$ وأن الزمرة $G_i/G_{i+1}$ تبديلية فإنه حسب المبرهنة(١٢-١-٢) فإن $G_i' \subseteq G_{i+1}$ ومنه

$$G^{(i)} = (G^{i-1})' \subseteq G_i' \subseteq G_{i+1}$$

وهذا يبـــين لنـــا أن العلاقـــة $G^{(i)} \subseteq G_{i+1}$ وذلـــك أيـــاً كـــان $i$. ممـــا ســـبق نجـــد أن $G^{(m-1)} \subseteq G_m = \langle e\rangle$ أي أن $G^{(m-1)} = \langle e \rangle$.
(٢)⇐(١). لنأخذ سلسلة المشتقات التالية

$$E = G^{(n)} \subset G^{(n-1)} \subset \cdots \subset G'' \subset G' \subset G$$

والتي تمثل سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من $G$ وحسب المبرهنة(١٢-١-١) فـــإن هذه السلسلة تحقق أن الزمرة $G^{(i+1)}$ ناظمية في $G^{(i)}$ وأن الزمرة $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ تبديلية، حيث $i = 1,2,\cdots(n-1)$. ومنه تكون الزمرة $G$ قابلة للحل. ₀

**مبرهنـــة ١٢-١-٦.**

لتكن $G$ زمرة و $H, K$ زمراً جزئية ناظمية قابلة للحل في $G$. عندئذ الزمرة $H.K$ قابلة للحل.

**البرهـــان.**

لنفرض أن $H,K$ زمر جزئية ناظمية قابلة للحل في $G$ عندئذ الجداء $H.K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ وحسب مبرهنة التماثل الزمري الثانية فإن

$$\frac{H.K}{K} \approx \frac{H}{H\cap K}$$



وبما أن الزمرة $H$ قابلة للحل فإنـــه حســـب المبرهنـــة (١٢-١-٣) تكـــون الزمـــرة $\frac{H}{H\cap K}$ قابلة للحل، وبالتالي فإن الزمرة $\frac{H.K}{K}$ قابلة للحل. وبما أن كلاً من الزمر التالية $H, \frac{H.K}{K}$ قابلة للحل فإنه حسب المبرهنة (١٢-١-٤) تكون الزمرة $H.K$ قابلة للحل. ₀

**مبرهنـــة ١٢-١-٧.**

كل زمرة منتهية تحوي زمرة جزئية ناظمية قابلة للحل أعظمية.

**البرهـــان.**

لتكن $G$ زمرة منتهية وأن $K$ الزمرة الجزئية الناظمية القابلة للحـــل فـــي $G$ ذات المرتبة الأكبر. ولتكن $H$ زمرة جزئية ناظمية قابلة للحل في $G$ عندئذ حسب المبرهنة (١٢-١-٦) فإن الجداء $H.K$ زمرة جزئية ناظميـــة قابلـــة للحـــل فـــي $G$. وبمـــا أن $K \subseteq H.K$ وحسب اختيارنا للزمـــرة $K$ نجـــد أن $K = H.K$ وهـــذا يبـــين لنـــا أن $H \subseteq K$. مما سبق نجد أن الزمرة $K$ هي الزمرة الجزئية الناظميـــة الأعظميـــة القابلة للحل في $G$. ₀

## ١٢-٢. الزمـــر عـــديمـــة القـــوى.

في هذه الفقرة سوف ندرس صفاً من الزمر يقع بين صف الزمر التبديلية وصـــف الزمر القابلة للحل. لأجل ذلك سوف ندخل بعض المفاهيم الضرورية لذلك.
لتكن $G$ زمرة و $A,B$ زمراً جزئية من الزمرة $G$. ولنضع

$$[A,B] = \{[a,b] = aba^{-1}b^{-1}: \quad a\in A, b\in B\}$$

إن المجموعة $[A,B]$ لا تشكل (في الحالة العامة) زمرة جزئية في $G$. لنرمز $\langle [A,B]\rangle$ للزمرة الجزئية من الزمرة $G$ المولدة بالمجموعة $[A,B]$.

**تمهيديـــة ١٢-٢-١.**

لتكن $G$ زمرة و $A, A_1, B, B_1$ زمراً جزئية من الزمرة $G$. عندئذ:

١ - إذا كانت $A\subseteq A_1, B\subseteq B_1$ فإن $\langle [A,B]\rangle \subseteq \langle [A_1,B_1]\rangle$.

٢ - إذا كانت الزمرة $A$ ناظمية في $G$ فإن $\langle[A,B]\rangle \subseteq A$.

٣ - إذا كانت الزمرة $B$ ناظمية في $G$ فإن $\langle[A,B]\rangle \subseteq B$.

**البرهان.**

١ - ليكن $[a,b]\in[A,B]$ عندئذ $a\in A\subseteq A_1$ ، $b\in B\subseteq B_1$ ومنه

$$[a,b]\subseteq[A_1,B_1]\subseteq\langle[A_1,B_1]\rangle$$

وهذا يبين لنا أن $[A,B]\subseteq\langle[A_1,B_1]\rangle$ أي أن $\langle[A,B]\rangle\subseteq\langle[A_1,B_1]\rangle$.

٢ - ليكن $[a,b]\in[A,B]$ عندئذ، وبما أن الزمرة $A$ ناظمية في $G$ فإن $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}\in aA\subseteq A$ وهذا يبين لنا أن $[A,B]\subseteq A$ ومنه $\langle[A,B]\rangle\subseteq A$.

٣ - ليكن $[a,b]\in[A,B]$ عندئذ، وبما أن الزمرة $B$ ناظمية في $G$ فإن $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}\in Bb^{-1}\subseteq B$ وهذا يبين لنا أن $[A,B]\subseteq B$ ومنه $\langle[A,B]\rangle\subseteq B$.

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة. نقول عن السلسلة المنتهية

$$E=G_n\subseteq G_{n-1}\subseteq\cdots\subseteq G_1\subseteq G_0=G$$

من الزمر الجزئية من $G$ إنها ناظمية إذا كانت الزمرة $G_i$ ناظمية في $G_{i-1}$ وذلك أياً كان $1\le i\le n$.

نأتي الآن إلى تعريف الزمرة عديمة القوى.

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة. نقول عن الزمرة $G$ إنها عديمة القوى إذا ملكت سلسلة ناظمية منتهية من الزمر الجزئية من $G$ على الشكل

$$E=G_n\subseteq G_{n-1}\subseteq\cdots\subseteq G_1\subseteq G_0=G$$

تحقق:

١- الزمرة الجزئية $G_i$ ناظمية في $G$ حيث $0\le i\le n$.

٢- $G_{i-1}/G_i\subseteq Z(G/G_i)$ حيث $1\le i\le n$.

ينتج من التعريف مباشرة أن كل زمرة تبديلية هي زمرة عديمة القوى، لأنها تملك سلسلة ناظمية وهي $E\subset Z(G)=G$ وهذه السلسلة تحقق الشرطين (١) و(٢) من التعريف. و يتضح أيضا من التعريف أن كل زمرة عديمة القوى هي زمرة قابلة للحل. نأتي الآن إلى المبرهنة التالية التي تعطينا شرطا مكافئا آخر لشرط الزمرة عديمة القوى.

**مبرهنة ٢-٢-١٢.**

لتكن $G$ زمرة. القضايا التالية متكافئة:

١- الزمرة $G$ عديمة القوى.

٢- الزمرة $G$ تملك سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من الشكل

$$E=G_n\subseteq G_{n-1}\subseteq\cdots\subseteq G_1\subseteq G_0=G$$

تحقق أن الزمرة $G_i$ ناظمية في $G$ وأن $\langle[G_{i-1},G]\rangle\subseteq G_i$ حيث $0\le i\le n$.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). لنفرض أن الزمرة $G$ عديمة القوى، عندئذ الزمرة $G$ تملك سلسلة ناظمية من الزمر الجزئية من $G$ على الشكل

$$E=G_n\subseteq G_{n-1}\subseteq\cdots\subseteq G_1\subseteq G_0=G$$

وتحقق أن الزمرة $G_i$ ناظمية في $G$ وأن $G_{i-1}/G_i\subseteq Z(G/G_i)$ حيث $1\le i\le n$. بقي علينا إثبات أن $\langle[G_{i-1},G]\rangle\subseteq G_i$. لنبرهن أولاً أن $[G_{i-1},G]\subseteq G_i$. ليكن $[x,y]\in[G_{i-1},G]$ عندئذ $y\in G$ ، $x\in G_{i-1}$ ومنه $x.G_{i-1}\in G_{i-1}/G_i$ وأن $y.G_i\in G/G_i$، وبما أن $G_{i-1}/G_i\subseteq Z(G/G_i)$ نجد أن

$$(x.G_i)(y.G_i)=(y.G_i)(x.G_i)$$

وبالتالي $(x.G_i)(y.G_i)(x^{-1}.G_i)(y^{-1}.G_i)=G_i$ ومنه $(x.y.x^{-1}.y^{-1})G_i=G_i$ أي أن $[x,y]=x.y.x^{-1}.y^{-1}\in G_i$. ومنه $[G_{i-1},G]\subseteq G_i$ وهذا يبين لنا أن $\langle[G_{i-1},G]\rangle\subseteq G_i$ وذلك أياً كان $1\le i\le n$.

(٢)⇐(١). بما أن الزمرة $G_i$ ناظمية في $G$ عندئذ تكون الزمرة $G_i$ ناظمية في $G_{i-1}$ وذلك أياً كان $1 \le i \le n$. يبقى علينا لإثبات أن الزمرة $G$ عديمة القوى، أن نبرهن أن $G_{i-1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$ حيث $1 \le i \le n$. ليكن $zG_i \in G_{i-1}/G_i$ عندئذ $z \in G_{i-1}$ ومنه أياً كان $xG_i \in G/G_i$ فإن $[z,x] \in [G_{i-1},G] \subseteq G_i$، أي أن $zxz^{-1}x^{-1} \in G_i$ وبالتالي $(zxz^{-1}x^{-1})G_i = G_i$ وهذا يبين لنا أن

$$(zG_i)(xG_i) = (xG_i)(zG_i)$$

أي أن $zG_i \in Z(G/G_i)$. مما سبق نجد أن $G_{i-1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$ وبالتالي الزمرة $G$ عديمة القوى. ₀

المبرهنة التالية تخبرنا عن طبيعة الزمر الجزئية وزمر الخارج للزمر عديمة القوى.

**مبرهنة ١٢-٢-٣.**

لتكن $G$ زمرة عديمة القوى. عندئذ:

١- أي زمرة جزئية من الزمرة $G$ هي زمرة عديمة القوى.

٢- إذا كانت $N$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ فإن زمرة الخارج $G/N$ عديمة القوى.

**البرهان.**

لنفرض أن المرة $G$ عديمة القوى، عندئذ وحسب المبرهنة(١٢-٢-٢) توجد سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من الزمرة $G$ على الشكل

$$E = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

تحقق أن الزمرة $G_i$ ناظمية في $G$ حيث $0 \le i \le n$ وأن $\langle [G_{i-1},G] \rangle \subseteq G_i$، $1 \le i \le n$.

١ - لتكن $H$ زمرة جزئية من الزمرة $G$. ولنضع $H_i = H \cap G_i$ وذلك أياً كان $0 \le i \le n$. فنجد أن $H_i$ زمرة جزئية من الزمرة $H$ وأن

$$H_i = H \cap G_i \subseteq H \cap G_{i-1} = H_{i-1}$$



حيث $0 \le i \le n$. بهذا الشكل نحصل على السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية من $H$ على الشكل

$$.E = H_n \subseteq H_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq H_2 \subseteq H_1 \subseteq H_0 = H$$

لنبرهن أن الزمرة $H_i$ ناظمية في $H$. ليكن $x \in hH_ih^{-1}$، وذلك أياً كان $h \in H$ عندئذ يوجد $h_i \in H_i$ بحيث $x = hh_ih^{-1}$. وواضح أن $x \in H$. من جهة أخرى، بما أن $h \in H \subseteq G$ وأن $h_i \in H_i \subseteq G_i$ ولكون $G_i$ ناظمية في $G$ ينتج أن $x = hh_ih^{-1} \in G_i$ ومنه $x \in H \cap G_i = H_i$، أي أن الزمرة $H_i$ ناظمية في $H$ وذلك أياً كان $0 \le i \le n$. لنبرهن الآن أن $\langle [H_{i-1},H] \rangle \subseteq H_i$ وذلك أياً كان $1 \le i \le n$.

بما أن $H_{i-1} \subseteq G_{i-1}$ وأن $H \subseteq G$ فإنه حسب التمهيدية (١٢-٢-١) يكون

$$\langle [H_{i-1},H] \rangle \subseteq \langle [G_{i-1},G] \rangle \subseteq G_i$$

كذلك بما أن $H_i \subseteq H$ فإن $\langle [H_{i-1},H] \rangle \subseteq H$. مما سبق نجد أن $\langle [H_{i-1},H] \rangle \subseteq H \cap G_i = H_i$ حيث $1 \le i \le n$. وحسب المبرهنة(١٢-٢-٢) نجد أن الزمرة $H$ عديمة القوى.

٢ - لتكن $N$ زمرة جزئية ناظمية في $G$، عندئذ الجداء $G_iN$ زمرة جزئية من الزمرة $G$، وبالتالي فإن $G_iN/N$ زمرة جزئية من الزمرة $G/N$، وذلك أياً كان $0 \le i \le n$. وبما أن $G_iN \subseteq G_{i-1}N$ فإن $G_iN/N \subseteq G_{i-1}N/N$ بهذا الشكل نحصل على السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية من $G/N$ وهي

$$N = \frac{G_nN}{N} \subseteq \frac{G_{n-1}N}{N} \subseteq \cdots \subseteq \frac{G_2N}{N} \subseteq \frac{G_1N}{N} \subseteq \frac{G_0N}{N} = \frac{G}{N}$$

لنبرهن أن الزمرة $G_iN/N$ ناظمية في الزمرة $G/N$ وذلك أياً كان $0 \le i \le n$. ليكن $\bar{y} \in \bar{g}(\frac{G_iN}{N})\bar{g}^{-1}$، وذلك أياً كان $\bar{g} \in G/N$ ومنه يوجد $\bar{g}_i \in G_iN/N$ يحقق $\bar{y} = \overline{gg_ig^{-1}}$، ومنه

$$\bar{y} = (gN)(g_iN)(g^{-1}N) = (gg_ig^{-1})N$$

وبما أن الزمرة $G_i$ ناظمية في $G$ فإن $gg_ig^{-1} \in G_i$ وبالتالي

$$\overline{y} = (gg_ig^{-1})N \in G_i/N \subseteq G_iN/N$$

لنبرهن الآن على أن $\langle[G_{i-1}N/N, G/N]\rangle \subseteq G_iN/N$ . لـيكن $yN \in G/N$ ، $xN \in G_{i-1}N/N$ عندئذ $y \in G$ ، $x \in G_{i-1}$ ومنه

$$[xN, yN] = (xN)(yN)(xN)^{-1}(yN)^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})N \in G_i/N \subseteq G_iN/N$$

مما سبق وحسب المبرهنة(١٢-٢-٢) نجد أن الزمرة $G/N$ عديمة القوى. ∘

لندرس الآن خاصة أخرى من خواص الزمر الجزئية للزمر عديمة القوى، وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١٢-٢-٤.**

لتكن $G$ زمرة عديمة القوى و $H \neq G$ زمرة جزئية من $G$. عندئذ $N(H) \neq H$ .

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة عديمة القوى، عندئذ فإن $G$ تملك سلسلة ناظمية منتهية من الزمر الجزئية من $G$ على الشكل

$$E = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

تحقق $\langle[G_{i-1},G]\rangle \subseteq G_i$ حيث $1 \le i \le n$. ولتكن $H \neq G$ زمرة جزئية من $G$. بما أن $G_n = \langle e\rangle \subseteq H$ وأن $H \subset G = G_0$ ، لنفرض أن $k$ أول دليل من أجله $G_{k-1} \not\subset H$ ، $G_k \subseteq H$ وبما أن

$$[G_{k-1},H] \subseteq [G_{k-1},G] \subseteq G_k \subseteq H$$

فإنه أياً كان $z \in N(H)$ و أياً كان $h \in H$ نجد أن

$$zhz^{-1} = (zhz^{-1}h^{-1})h = [z,h]h \in [G_{k-1},H]h \subseteq Hh = H$$

أي أن $zHz^{-1} \subseteq H$ . بشكل مشابه نجد أن $z^{-1}Hz \subseteq H$ وهذا يبين لنا أن $H \subseteq zHz^{-1}$ أي أن $zHz^{-1} = H$ . مما سبق نجد أن $G_{k-1} \subseteq N(H)$ . وهكذا نجد أن $N(H) \neq H$ ، لأنه إذا كان $N(H) = H$ وكما وجدنا أعلاه يكون $G_{k-1} \subseteq N(H) = H$ وهذا يناقض اختيارنا للدليل $k$. أي أن $G_{k-1} \subseteq N(H)$ . ∘



بالاعتماد على المبرهنة السابقة نحصل على النتيجة الهامة التالية والتي نوردها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١٢-٢-٥.**

كل زمرة جزئية أعظمية من زمرة عديمة القوى تكون ناظمية.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة عديمة القوى و $K$ زمرة جزئية أعظمية في $G$. بما أن $G \neq K$ وحسب المبرهنة (١٢-٢-٤) فإن $K \subset N(K) \subseteq G$ ولكون الزمرة $K$ أعظمية في $G$ نجد أن $N(K) = G$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $K$ ناظمية في $G$. ∘

نأتي الآن لإثبات المبرهنة الهامة التالية:

**مبرهنة ١٢-٢-٦.**

كل زمرة منتهية مرتبتها قوة لعدد أولي هي زمرة عديمة القوى.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة منتهية ولنفرض أن $(G:1) = p^n$ حيث $p$ عدد أولي. البرهان سوف نورده بالاستقراء حسب $n$. نلاحظ أنه من أجل $n=0$ المبرهنة صحيحة. كذلك الأمر إذا كان $n=1$ فإن الزمرة $G$ تكون تبديلية، وبالتالي فهي عديمة القوى. من أجل $n>1$ لنفرض الآن أن المبرهنة صحيحة من أجل أي زمرة منتهية مرتبتها $p^m$ حيث $m<n$ . بما أن $(G:1)=p^n$ فإن $(Z(G):1)>1$ حسب المبرهنة(١٠-٥) وحسب مبرهنة لاغرانج فإن $(Z(G):1)=p^r$ حيث $0<r<n$ ، ومنه

$$(G/Z(G):1) = p^n/p^r = p^{n-r}$$

ولكون $n-r<n$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن الزمرة $G/Z(G)$ عديمة القوى وحسب المبرهنة(١٢-٢-٢) فإن الزمرة $G/Z(G)$ تملك السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية التالية

$$Z(G) = G_t/Z(G) \subseteq G_{t-1}/Z(G) \subseteq \cdots \subseteq G_1/Z(G) \subseteq G_0/Z(G) = G/Z(G)$$

تحقق أن الزمرة $G_i/Z(G)$ ناظمية في $G/Z(G)$ وأن

$$\langle[G_{i-1}/Z(G),G/Z(G)]\rangle\subseteq G_i/Z(G)$$

وذلك أياً كان $0\le i\le t$. ليكن $y\in gG_ig^{-1}$ وذلك أياً كان $g\in G$. عندئذ يوجد $g_i\in G_i$ يحقق $y=gg_ig^{-1}$ ومنه

$$yZ(G)=(gZ(G))(g_iZ(G))[gZ(G)]^{-1}\in$$
$$\in gZ(G)(G_i/Z(G))[gZ(G)]^{-1}\subseteq G_i/Z(G)$$

وذلك لأن الزمرة $G_i/Z(G)$ ناظمية في الزمرة $G/Z(G)$. وهذا يبين لنا أن $y=gg_ig^{-1}\in G_i$ وبالتالي الزمرة $G_i$ ناظمية في $G$ أياً كان $0\le i\le t+1$. لنبرهن على أن $\langle[G_{i-1},G]\rangle\subseteq G_i$ حيث $1\le i\le t+1$. ليكن $z\in G$, $x\in G_{i-1}$ عندئذ $z.Z(G)\in G/Z(G)$, $x.Z(G)\in G_{i-1}/Z(G)$ ومنه

$$[x.Z(G),z.Z(G)]\in[G_{i-1}/Z(G),G/Z(G)]\subseteq G_i/Z(G)$$

وهذا يبين لنا أن

$$(x.Z(G))(y.Z(G))(x^{-1}.Z(G))(y^{-1}.Z(G))\in G_i/Z(G)$$

أي أن $(xyx^{-1}y^{-1})Z(G)\in G_i/Z(G)$ وبالتالي $[x,y]=(xyx^{-1}y^{-1})\in G_i$. وهكذا نجد أن $[G_{i-1},G]\subseteq G_i$ أي أن $\langle[G_{i-1},G]\rangle\subseteq G_i$ حيث $1\le i\le t$. وبما أن $\langle[G_t,G]\rangle\subseteq G_{t+1}$ وأن $G_t=Z(G)$ نجد أن $G_{t+1}=E$. مما سبق وحسب المبرهنة (١٢-٢-٢) نجد أن الزمرة $G$ عديمة القوى. ∘

**مبرهنة ١٢-٢-٧.**

الجداء المباشر لأي عدد منته من الزمر عديمة القوى هو زمرة عديمة القوى.

**البرهان.**

يكفي لإثبات صحة المبرهنة أن نثبت أن الجداء المباشر لزمرتين عديمتي القوى هو زمرة عديمة القوى. لتكن $H,K$ زمر عديمة القوى عندئذ وحسب المبرهنة (١٢-٢-٢) فإنه لأجل الزمرة $H$ توجد سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من $H$ على الشكل

$$E=H_n\subseteq H_{n-1}\subseteq H_{n-2}\subseteq\cdots\subseteq H_2\subseteq H_1\subseteq H_0=H$$



تحقق أن الزمرة $H_i$ ناظمية في $H$ حيث $0\le i\le n$ وأن $\langle[H_{i-1},H]\rangle\subseteq H_i$ حيث $1\le i\le n$. كذلك لأجل الزمرة $K$ توجد سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من $K$ على الشكل

$$(*)\qquad E=K_m\subseteq K_{m-1}\subseteq K_{m-2}\subseteq\cdots\subseteq K_2\subseteq K_1\subseteq K_0=K$$

تحقق أن الزمرة $K_i$ ناظمية في $K$ حيث $0\le i\le m$ وأن $\langle[K_{i-1},K]\rangle\subseteq K_i$ حيث $1\le i\le m$. إذا كان $n\ne m$ لنفرض أن $n>m$ عندئذ بالإمكان إضافة حدود جديدة إلى السلسلة (*) لنحصل على سلسلة جديدة على الشكل

$$E=K_n=K_{n-1}=\cdots=K_m\subseteq K_{m-2}\subseteq\cdots\subseteq K_2\subseteq K_1\subseteq K_0=K$$

حيث $K_j=E$ لأجل $m\le j\le n$. لنفرض أن $G=K\oplus H$ ولنبرهن أن الزمرة $G$ عديمة القوى. لنضع $G_i=K_i\oplus H_i$ حيث $0\le i\le n$ فنجد أن

$$G_i=K_i\oplus H_i\subseteq K_{i-1}\oplus H_{i-1}=G_{i-1}$$

عندئذ نحصل على السلسلة التالية

$$E_G=E_K\oplus E_H=G_n\subseteq G_{n-1}\subseteq G_{n-2}\subseteq\cdots\subseteq G_2\subseteq G_1\subseteq G_0=G$$

من الزمر الجزئية من الزمرة $G$ وحسب التمهيدية (٨-١-٨) وبما أن الزمرة $H_i$ ناظمية في $H$ وأن $K_i$ ناظمية في $K$ فإن الزمرة $G_i=K_i\oplus H_i$ تكون ناظمية في $G=K\oplus H$ حيث $0\le i\le n$. لنبرهن على أن $\langle[G_{i-1},G]\rangle\subseteq G_i$، بما أن

$$[G_{i-1},G]=[H_{i-1}\oplus K_{i-1},H\oplus K]=[H_{i-1},H]\oplus[K_{i-1},K]\subseteq H_i\oplus K_i=G_i$$

فإن $\langle[G_{i-1},G]\rangle\subseteq G_i$. مما سبق وحسب المبرهنة (٩-٢-٢) نجد أن الزمرة $G=K\oplus H$ عديمة القوى. ∘

لمتابعة دراستنا للزمر عديمة القوى، لابد لنا من بعض المفاهيم الجديدة والتي هي بحد ذاتها تعد بنى جزئية ذات خواص هامة والبداية ستكون من التعريف التالي:

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة ولنعرف الزمر الجزئية $Z_n(G),\Gamma_n(G)$ من الزمرة $G$ بالشكل التالي:

١ – $\Gamma_1(G)=G$ ومن أجل أي عدد صحيح $n>1$ فإن

$$\Gamma_n(G)=\langle[\Gamma_{n-1},G]\rangle$$

٢ – $Z_0(G)=E$ و أياً كان $n\in N^*$ فإن

$$\frac{Z_n(G)}{Z_{n-1}(G)}=Z(\frac{G}{Z_{n-1}(G)})$$

كما هو واضح من التعريف فإن كلاً من $\Gamma_1(G),Z_0(G)$ هي زمر جزئية من الزمرة $G$ وقبل البدء في دراسة تأثير البنى الجزئية $\Gamma_i(G),Z_i(G)$ لنتعرف على طبيعة هذه البنى الجزئية وخواصها وذلك من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيدية ١٢-٢-٨.**

لأجل أي زمرة $G$ القضايا التالية صحيحة:

١ – كل من

$$\forall n\in N^*;\quad \Gamma_n(G)$$

$$\forall n\in N;\quad Z_n(G)$$

زمر جزئية من الزمرة $G$.

٢ – $G=\Gamma_1(G)\supseteq\Gamma_2(G)\supseteq\Gamma_3(G)\supseteq\Gamma_4(G)\supseteq\cdots$

٣ – $E=Z_0(G)\subseteq Z_1(G)\subseteq Z_2(G)\subseteq Z_3(G)\subseteq\cdots$

**البرهان.**

١ – ينتج مباشرة من التعريف.

٢ – البرهان بالاستقراء على $n$. حسب التعريف لدينا $\Gamma_1(G)=G$.

من أجل $n=2$ فإن $\Gamma_2(G)\subseteq\Gamma_1(G)=G$.

من أجل $n=3$ فإن $\Gamma_3(G)=\langle[\Gamma_2(G),G]\rangle\subseteq\langle[\Gamma_1(G),G]\rangle=\Gamma_2(G)$. لنفرض أن $\Gamma_n(G)\subseteq\Gamma_{n-1}(G)$ عندئذ

$$\Gamma_{n+1}(G)=\langle[\Gamma_n(G),G]\rangle\subseteq\langle[\Gamma_{n-1}(G),G]\rangle=\Gamma_n(G)$$

٣ – البرهان بالاستقراء على $n$. حسب التعريف لدينا $Z_0(G)=E$. ومنه $E=Z_0(G)\subseteq Z_1(G)$ وبالتالي فإن $\frac{Z_2(G)}{Z_1(G)}=Z(\frac{G}{Z_1(G)})$ أي أن $Z_1(G)\subseteq Z_2(G)$. لنفرض أن $Z_{n-1}(G)\subseteq Z_n(G)$ عندئذ $\frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)}=Z(\frac{G}{Z_n(G)})$ ومنه $Z_n(G)\subseteq Z_{n+1}(G)$. ∘

من خلال المبرهنة التالية سوف ندرس طبيعة الزمر الجزئية $\Gamma_n(G),Z_n(G)$.

**مبرهنة ١٢-٢-٩.**

لتكن $G$ زمرة. عندئذ القضايا التالية صحيحة:

١ – أياً كان $n\in N^*$ فإن $\Gamma_n(G)$ زمرة جزئية متميزة في $G$.

٢ – أياً كان $n\in N$ فإن $Z_n(G)$ زمرة جزئية متميزة في $G$.

**البرهان.**

١ – بالاستقراء على $n$.

من أجل $n=1$ فإن $\Gamma_1(G)=G$ وبالتالي الزمرة $\Gamma_1(G)$ متميزة في $G$.

من أجل $n=2$ فإن $\Gamma_2(G)=\langle[\Gamma_1(G),G]\rangle=\langle[G,G]\rangle=G'$ وحسب المبرهنة (١٢-١-١) فإن الزمرة $G'$ متميزة في $G$ وبالتالي الزمرة $\Gamma_2(G)$ متميزة في $G$. من أجل $n>1$ لنفرض أن الزمرة $\Gamma_n(G)$ متميزة في $G$. ليكن $\alpha\in Aut(G)$ بما أن $\Gamma_{n+1}(G)=\langle[\Gamma_n,G]\rangle$ عندئذ أياً كان $[h,k]\in[\Gamma_n(G),G]$ فإن

$$\alpha([h,k])=\alpha(hkhk^{-1})=\alpha(h)\alpha(k)(\alpha(h))^{-1}(\alpha(k))^{-1}$$

وبما أن الزمرة $\Gamma_n(G)$ متميزة في $G$ فإنه أياً كان $x\in\Gamma_n(G)$ فإن

$$\alpha(x)\in\alpha(\Gamma_n(G))=\Gamma_n(G)$$

ومنه بما أن $h\in\Gamma_n(G)$ فإن $\alpha(h)\in\Gamma_n(G)$ وبالتالي

$$\alpha([h,k])=[\alpha(h),\alpha(k)]\in[\Gamma_n(G),G]$$

أي أن

$$\alpha([\Gamma_n(G),G])\subseteq[\Gamma_n(G),G]\subseteq\langle[\Gamma_n(G),G]\rangle$$

وهذا يبين لنا أن

$$\alpha(\Gamma_{n+1}(G)) = \alpha([\Gamma_n(G),G]) \subseteq \langle[\Gamma_n(G),G]\rangle = \Gamma_{n+1}(G)$$

وذلك أياً كان $\alpha \in Aut(G)$ وبما أن $\alpha^{-1} \in Aut(G)$ فإن $\alpha^{-1}(\Gamma_{n+1}(G)) \subseteq \Gamma_{n+1}(G)$ ومنه $\Gamma_{n+1}(G) \subseteq \alpha(\Gamma_{n+1}(G))$. مما سبق نجد أن $\alpha(\Gamma_{n+1}(G)) = \Gamma_{n+1}(G)$ أي أن الزمرة $\Gamma_{n+1}(G)$ متميزة في $G$. وهكذا نجد أنه أياً كان $n \in N^*$ فإن الزمرة $\Gamma_n(G)$ متميزة في $G$.

٢ – بالاستقراء على $n$. من أجل $n=0$ فإن $Z_0(G)=E$ ومنه الزمرة $Z_0(G)$ متميزة في $G$. من أجل $n=1$ نجد أن

$$Z_1(G) = \frac{Z_1(G)}{Z_0(G)} = Z(\frac{G}{Z_0(G)}) = Z(G)$$

وحسب التمرين المحلول (٧-١) بما أن الزمرة $Z(G)$ متميزة في $G$ فإن الزمرة $Z_1(G)$ متميزة في $G$. من أجل $n>1$ لنفرض أن الزمرة $Z_n(G)$ متميزة في $G$ وبما أن الزمرة $Z(\frac{G}{Z_n(G)})$ متميزة في $\frac{G}{Z_n(G)}$ وذلك حسب التمرين المحلول (٧-١) وبما أن

$$Z(\frac{G}{Z_n(G)}) = \frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)}$$

نجد أن الزمرة $\frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)}$ متميزة في الزمرة $\frac{G}{Z_n(G)}$. وبما أن $Z_n(G) \subseteq Z_{n+1}(G) \subseteq G$ وحسب المبرهنة (٧-٨) فإن الزمرة $Z_{n+1}(G)$ تكون متميزة في $G$. مما سبق نجد أنه $\forall n \in N$ فإن الزمرة $Z_n(G)$ تكون متميزة في $G$. ه

**نتيجة.**

لتكن $G$ زمرة. عندئذ القضايا التالية صحيحة:

١ – أياً كان $n \in N^*$ فإن $\Gamma_n(G)$ زمرة جزئية ناظمية في $G$.

٢ – أياً كان $n \in N$ فإن $Z_n(G)$ زمرة جزئية ناظمية في $G$.



**البرهان.**

ينتج من المبرهنة (١٢-٢-٩) وذلك لأن كل زمرة متميزة تكون ناظمية. ه

لندرس الآن العلاقة الجديرة بالملاحظة بين الزمرتين الجزئيتين $\Gamma_n(G), Z_n(G)$ وبين الزمرة $G$ وذلك عندما تكون الزمرة $G$ عديمة القوى.

**مبرهنة ١٢-٢-١٠.**

الشروط التالية متكافئة لأجل أي زمرة $G$:

١ – الزمرة $G$ عديمة القوى.

٢ – يوجد $n \in N^*$ بحيث $\Gamma_n(G) = E$.

٣ – يوجد $n \in N$ بحيث $Z_n(G) = G$.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). لنفرض أن الزمرة $G$ عديمة القوى عندئذ وحسب المبرهنة (٩-٢-٢) فإن الزمرة $G$ تملك سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من الشكل

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_r = G$$

تحقق أن الزمرة $G_i$ ناظمية في $G$ حيث $0 \le i \le r$ وأن $\langle[G_i,G]\rangle \subseteq G_{i+1}$ $0 \le i \le r-1$. لنبرهن بالاستقراء على أن $\Gamma_{j+1}(G) \subseteq G_{r-j}$ $j = 0,1,2,3,\cdots$.

من أجل $j=0$ فإن $\Gamma_1(G) \subseteq G = G_r$ والقضية صحيحة.

من أجل $j>0$ لنفرض أن $\Gamma_j(G) \subseteq G_{r-(j-1)} = G_{r-j+1}$ وبما أن $\langle[\Gamma_{r-j+1}(G),G]\rangle \subseteq G_{r-j}$ عندئذ

$$\Gamma_{j+1}(G) = \langle[\Gamma_j(G),G]\rangle \subseteq \langle[G_{r-j},G]\rangle \subseteq G_{r-j}$$

وذلك لأن الزمرة $G_{r-j}$ ناظمية في الزمرة $G$. ومنه $\Gamma_{r+1}(G) \subseteq G_{r-r} = G_0 = E$ وبالتالي $\Gamma_{r+1}(G) = E$.

(٢)⇐(١). لدينا

$$E = \Gamma_n(G) \subseteq \Gamma_{n-1}(G) \subseteq \Gamma_{n-2}(G) \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_2(G) \subseteq \Gamma_1(G) = G$$

سلسلة من الزمر الجزئية من الزمرة $G$ تحقق أن الزمرة $\Gamma_i(G)$ ناظمية في $G$ حيث $1\le i\le n$. وأن $\langle[\Gamma_i(G),G]\rangle=\Gamma_{i+1}(G)$ حيث $1\le i\le n-1$ وحسب المبرهنة (١٢-٢-٢) فإن الزمرة $G$ عديمة القوى.

(١)⇐(٣). لنفرض أن الزمرة $G$ عديمة القوى وحسب التعريف فإن الزمرة $G$ تملك سلسلة ناظمية منتهية من الزمر الجزئية من $G$ على الشكل

$$E=G_0\subseteq G_1\subseteq G_2\subseteq\cdots\subseteq G_r=G$$

تحقق أن الزمرة $G_i$ ناظمية في $G$ حيث $0\le i\le r$ وأن $\frac{G_{i+1}}{G_i}\subseteq Z(\frac{G}{G_i})$ حيث $0\le i\le r$. ولنبرهن بالاستقراء على أن $G_i\subseteq Z_i(G)$ حيث $0\le i\le r$.

من أجل $i=0$ فإن $G_0=E=Z_0(G)$ والفرضية صحيحة في هذه الحالة.

من أجل $i>0$ لنفرض أن $G_{i-1}\subseteq Z_{i-1}(G)$ عندئذ $G_{i-1}.Z_{i-1}(G)\subseteq Z_{i-1}(G)$ وبما أن $\frac{G_i}{G_{i-1}}\subseteq Z(\frac{G}{G_{i-1}})$ وحسب التمرين المحلول (٥-٩) نجد أن

$$\frac{G_i.Z_{i-1}(G)}{Z_{i-1}(G)}\subseteq Z(\frac{G}{Z_{i-1}(G)})=\frac{Z_i(G)}{Z_{i-1}(G)}$$

ومنه $G_i\subseteq Z_i(G)$. وهكذا نجد أن $G=G_r\subseteq Z_r(G)$ أي أن $Z_r(G)=G$.

(٣)⇐(١). لنفرض أنه يوجد $n\in N$ بحيث $Z_n(G)=G$ عندئذ

$$E=Z_0(G)\subseteq Z_1(G)\subseteq Z_2(G)\subseteq\cdots\subseteq Z_n(G)=G$$

سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من الزمرة $G$ و التي تحقق أن الزمرة $Z_i(G)$ ناظمية في $G$. وبالتالي تكون السلسلة السابقة سلسلة ناظمية $0\le i\le n$. من جهة أخرى بما أن $\frac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)}=Z(\frac{G}{Z_i(G)})$ حيث $0\le i\le n-1$ نجد أن الزمرة $G$ عديمة القوى. ₀

**تمهيدية ١٢-٢-١١.**

لتكن $G$ زمرة. عندئذ:

١- $\forall x,y,z\in G$ فإن $[xy,z]=x[y,z]x^{-1}[x,z]$.



٢ – إذا كانت $H,M,K$ زمر جزئية ناظمية في $G$ فإن

$$\langle[H.M,K]\rangle=\langle[H,K]\rangle.\langle[M,K]\rangle$$

**البرهان.**

١ – ليكن $x,y,z\in G$ عندئذ

$$[xy,z]=(xy)z(xy)^{-1}z^{-1}=xyzy^{-1}x^{-1}z^{-1}=x(yzy^{-1})(z^{-1}z)x^{-1}z^{-1}=$$
$$=x[y,z]zx^{-1}z^{-1}=x[y,z]x^{-1}(xzx^{-1}z^{-1})=x[y,z]x^{-1}[x,z]$$

٢ – لتكن $H,M,K$ زمر جزئية ناظمية في $G$ عندئذ الجداء $H.M$ زمرة جزئية في $G$ وبما أن $H,M\subseteq H.M$ فإنه حسب التمهيدية (١٢-٢-١) نجد أن

$$\langle[H,K]\rangle,\langle[M,K]\rangle\subseteq\langle[H.M,K]\rangle$$

وبما أن الزمر $H,M,K$ ناظمية في $G$ فإن الزمر الجزئية $\langle[H,K]\rangle,\langle[M,K]\rangle$ تكون ناظمية في $G$ (راجع التمرين ١٢-٦). ومنه فإن

$$\langle[H,K]\rangle.\langle[M,K]\rangle\subseteq\langle[H.M,K]\rangle$$

ليكن $a\in[H.M,K]$ عندئذ $a=[hm,k]$ حيث $h\in H,m\in M,k\in K$ وحسب (١) فإن

$$a^{-1}=[hm,k]^{-1}=(h[m,k]h^{-1}[h,k])^{-1}=[h,k]^{-1}h[m,k]^{-1}h^{-1}$$

وبما أن $[h,k]\in[H,K]\subseteq\langle[H,K]\rangle$ فإن $[h,k]^{-1}\in\langle[H,K]\rangle$. من جهة أخرى بما أن الزمرة $\langle[M,K]\rangle$ ناظمية في $G$ وأن $[m,k]\in[M,K]\subseteq\langle[M,K]\rangle$ نجد أن $[m,k]^{-1}\in\langle[M,K]\rangle$ وبالتالي $h[m,k]^{-1}h^{-1}\in\langle[M,K]\rangle$، مما سبق نجد أن $a^{-1}\in\langle[H,K]\rangle.\langle[M,K]\rangle$ وبما أن الجداء في الطرف الأيمن يشكل زمرة جزئية في $G$ فإن $a\in\langle[H,K]\rangle.\langle[M,K]\rangle$ ومنه $\langle[H.M,K]\rangle\subseteq\langle[H,K]\rangle.\langle[M,K]\rangle$، وهكذا نجد أن $\langle[H.M,K]\rangle=\langle[H,K]\rangle.\langle[M,K]\rangle$. ₀

**تعريف.**

لتكن $G$ و $n$ عددين صحيحين موجبين ولتكن $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_n$ زمراً جزئية من الزمرة $G$. نعرف المبادل للزمر $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_n$ بالشكل التالي:

$$[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_n]=\begin{cases} G_1 & if\ n=1\\ \langle[G_1,G_2]\rangle & if\ n=2 \\ \langle[\langle[G_1,G_2]\rangle,G_3]\rangle & if\ n=3\\ \langle[\langle\cdots\langle[\langle[\langle[G_1,G_2]\rangle,G_3]\rangle,G_4]\rangle,\cdots]\rangle,G_{n-1}]\rangle,G_n]\rangle & if\ n>3\end{cases}$$

**تمهيدية ١٢-٢-١٢.**

لتكن $G$ زمرة و $n$ عدداً صحيحاً موجباً، عندئذ

$$.[\underbrace{G,G,G,\cdots,G}_{n-once}]=\Gamma_n(G)$$

**البرهان.**

بالاستقراء حسب $n$. من أجل $n=1$ فإن $\Gamma_1(G)=G$.

من أجل $n=2$ فإن $[G,G]=\langle[G,G]\rangle=\langle[\Gamma_1(G),G]\rangle=\Gamma_2(G)$.

لنفرض أن القضية صحيحة من أجل $(n-1)$ عندئذ

$$[\underbrace{G,G,G,\cdots,G}_{n-once}]=\underbrace{\langle[\langle[\langle[\cdots\langle[\langle[G,G]\rangle,G]\rangle,G]\rangle\cdots]\rangle,G]\rangle,G]\rangle}_{n-once}=$$

$$=\langle[\Gamma_{n-1}(G),G]\rangle=\Gamma_n(G)$$

**تمهيدية ١٢-٢-١٣.**

لتكن $r,s$ أعداداً صحيحة موجبة وأن $r\le s$ ولتكن $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_s,H,K$ زمراً جزئية ناظمية من الزمرة $G$. عندئذ

$$[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},H.K,G_{r+1},G_{r+2},\cdots,G_s]=$$
$$=[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},H,G_{r+1},G_{r+2},\cdots,G_s].$$
$$.[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},K,G_{r+1},G_{r+2},\cdots,G_s]$$

**البرهان.**

من أجل $r=s=1$ عندئذ حسب التمهيدية (١٢-٢-١٢) فإن

$$[G_1,HK]=[G_1,H].[G_2,G]$$

من أجل $r=s>1$. لنفرض أن $M=[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1}]$ عندئذ



$$[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},H.K]=[M,H.K]=[M,H].[M,K]=$$
$$=[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},H].[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},K]$$

وذلك حسب التمهيدية (١٢-٢-١١).

من أجل $r=1<s$ عندئذ حسب التعريف نجد أن

$$[H.K,G_2,G_3,\cdots,G_s]=[[H.K,G_2],G_3,\cdots,G_s]=$$
$$=[[H,G_2].[K,G_2],G_3,\cdots,G_s]$$
$$=[[H,G_2,G_3].[K,G_2,G_3],\cdots,G_s]$$
$$=\cdots$$
$$=[H,G_2,G_3,\cdots,G_s].[K,G_2,G_3,\cdots,G_s]$$

من أجل $1<r<s$ عندئذ

$$[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},H.K,G_{r+1},G_{r+2},\cdots,G_s]=$$
$$=[[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},H.K],G_{r+1},G_{r+2},\cdots,G_s]=$$
$$=[[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},H][G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},K],G_{r+1},G_{r+2},\cdots,G_s].$$
$$.[[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},K],G_{r+1},G_{r+2},\cdots,G_s]$$
$$=[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},H,G_{r+1},G_{r+2},\cdots,G_s].$$
$$.[G_1,G_2,G_3,\cdots,G_{r-1},K,G_{r+1},G_{r+2},\cdots,G_s]$$

نأتي الآن لإثبات مبرهنة $H.Fitting-1938$ التي تتعلق بجداء الزمر عديمة القوى.

**مبرهنة ١٢-٢-١٤.**

لتكن $H,K$ زمراً جزئية ناظمية عديمة القوى من الزمرة $G$، عندئذ الجداء $H.K$ زمرة جزئية ناظمية عديمة القوى في $G$.

**البرهان.**

بما أن الزمر الجزئية $H,K$ ناظمية في $G$ فإن الجداء $H.K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. من جهة أخرى، بما أن الزمر $H,K$ عديمة القوى فإنه حسب المبرهنة (١٢-

٢-١٠) يوجد $\alpha+1,\beta+1\in N^*$ بحيث $\Gamma_{\alpha+1}(H)=E,\Gamma_{\beta+1}(K)=E$. لنبرهن على أن $\Gamma_{\alpha+\beta+1}(H.K)=E$. لدينا حسب التمهيدية (١٢-٢-١٢) أن

$$\Gamma_n(H.K)=[\underbrace{H.K,H.K,\cdots,H.K}_{n-once}]=[H,\underbrace{H.K,H.K,\cdots,H.K}_{n-1-once}].$$

$$.[K,\underbrace{H.K.K,H.K,\cdots,H.K}_{n-1-once}]$$

$$=\cdots.$$

$$=[L_1,L_2,L_3,\cdots,L_n]$$

حيث عدد المضاريب في الطرف الأيمن هو $2^n$ وأن $L_i=H, or L_i=K$ من أجل $i=1,2,\cdots,n$. ليكن $r$ عدداً صحيحاً موجباً، بما أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$ وأن الزمرة $\Gamma_r(H)$ متميزة في $H$ وذلك حسب المبرهنة (١٢-٢-٩) وأن $\Gamma_r(H)\subseteq H\subseteq G$ فإن الزمرة $\Gamma_r(H)$ ناظمية في $G$ وذلك حسب المبرهنة (٧-٧). وحسب التمهيدية (١٢-٢-١) فإن $[\Gamma_r(H),K]\subseteq\Gamma_r(H)$. لنفرض أن عدد الحدود في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة التي من أجلها $L_i=H$ يساوي $r$ وأن عدد الحدود التي من أجلها $L_i=K$ يساوي $n-r$ عندئذ $[L_1,L_2,L_3,\cdots,L_n]\subseteq\Gamma_r(H)$ وأنه من أجل $r<n$ فإن $[L_1,L_2,L_3,\cdots,L_n]\subseteq\Gamma_{n-r}(K)$.

من أجل $n=\alpha+\beta+1$ فإنه عندما $r\geq n+1$ أو $n-r\geq b+1$ فإن $\Gamma_r(H)=E$ وأن $\Gamma_{n-r}(K)=E$ وهذا يبين لنا أن $[L_1,L_2,L_3,\cdots,L_n]=E$ وهذا صحيح من أجل جميع المضاريب في العلاقة الأخيرة والتي عدد حدودها $2^n$. ومنه

$$\Gamma_n(H.K)=\Gamma_{\alpha+\beta+1}(H.K)=E$$

أي أن $\Gamma_{\alpha+\beta+1}(H.K)=E$ وحسب المبرهنة (١٢-٢-١٠) نجد أن الزمرة $H.K$ عديمة القوى. ₒ

**مبرهنة ١٢-٢-١٥.**

كل زمرة منتهية تحوي زمرة جزئية ناظمية عديمة القوى أعظمية.



**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة منتهية وأن $K$ الزمرة الجزئية الناظمية عديمة القوى في $G$ ذات المرتبة الأكبر. ولتكن $H$ زمرة جزئية ناظمية عديمة القوى في $G$ عندئذ حسب المبرهنة (١٢-٢-١٤) فإن الجداء $H.K$ زمرة جزئية ناظمية عديمة القوى في $G$. وبما أن $K\subseteq H.K$ وحسب اختيارنا للزمرة $K$ نجد أن $K=H.K$، وهذا يبين لنا أن $H\subseteq K$. مما سبق نجد أن الزمرة $K$ هي الزمرة الجزئية الناظمية الأعظمية عديمة القوى في $G$. ₒ

## ١٢-٣. الـ M- زمر.

في هذه الفقرة سوف ندرس الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمر الجزئية لزمرة ما منتهية التوليد وسوف نتعرف أيضا إلى صف معين من الزمر الذي يحقق هذا الشرط والبداية ستكون مع التعريف التالي:

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة ولتكن

$$E=A_0\subseteq A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n=G$$

سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من الزمرة $G$.

١ - نقول عن السلسلة السابقة إنها سلسلة ناظمية إذا كانت الزمرة $A_i$ ناظمية في $A_{i+1}$ حيث $i=0,1,2,\cdots,(n-1)$.

٢ - نقول عن السلسلة السابقة إنها M- سلسلة ناظمية إذا كانت سلسلة ناظمية (أي الزمرة $A_i$ ناظمية في $A_{i+1}$ حيث $i=0,1,2,\cdots,(n-1)$) وأن الزمرة $\frac{A_{i+1}}{A_i}$ إما دوارة غير منتهية أو منتهية.

**تعريف.**

نقول عن الزمرة $G$ إنها M- زمرة إذا ملكت M- سلسلة ناظمية.

نتيجة.

كل زمرة فتل هي M ـ زمرة.

لنتعرف الآن إلى الزمر الجزئية وزمر الخارج للـ M ـ زمر وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١٢-٣-١.**

لتكن $G$ عبارة عن M ـ زمرة. عندئذ:

١ – كل زمرة جزئية من $G$ هي M ـ زمرة.

٢ – إذا كانت $N$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ عندئذ $G/N$ عبارة عن M ـ زمرة.

**البرهان.**

بما أن الزمرة $G$ عبارة عن M ـ زمرة فإن الزمرة $G$ تملك سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من $G$ على الشكل

$$E=G_0\subseteq G_1\subseteq G_2\subseteq\cdots\subseteq G_n=G$$

تحقق أن الزمرة $G_i$ ناظمية في $G_{i+1}$ وأن الزمرة $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ إما دوارة غير منتهية أو منتهية حيث $i=0,1,2,\cdots,(n-1)$.

١ – لتكن $H$ زمرة جزئية من الزمرة $G$، ولنضع $H_i=H\cap G_i$، $(i=0,1,2,\cdots,n)$ عندئذ نحصل على سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من $H$ وهي

$$E=H_0\subseteq H_1\subseteq H_2\subseteq\cdots\subseteq H_n=H$$

لنبرهن على أن الزمرة $H_i$ ناظمية في $H_{i+1}$ $i=0,1,2,\cdots,n$. ليكن $y\in h_{i+1}H_ih_{i+1}^{-1}$ وذلك $\forall h_{i+1}\in H_{i+1}$ عندئذ يوجد $h_i\in H_i$ بحيث $y=h_{i+1}h_ih_{i+1}^{-1}$ وبما أن $h_i\in G_i$ وأن $h_{i+1}\in G_{i+1}$ ولكون الزمرة $G_i$ ناظمية في $G_{i+1}$ نجد أن $y\in G_i$ وبما أن $y\in H$ نجد أن $y\in H\cap G_i=H_i$ أي أن $h_{i+1}h_ih_{i+1}^{-1}\subseteq H_i$ ومنه نجد أن الزمرة $H_i$ ناظمية في $H_{i+1}$ $i=0,1,2,\cdots,n$. من جهة أخرى لدينا

$$\frac{H_{i+1}}{H_i}=\frac{G_{i+1}\cap H}{G_i\cap H}=\frac{G_{i+1}\cap H}{G_i\cap(G_{i+1}\cap H)}\approx\frac{G_i(G_{i+1}\cap H)}{G_i}\subseteq\frac{G_{i+1}}{G_i}$$

إذا كانت الزمرة $\frac{H_{i+1}}{H_i}$ منتهية يتم المطلوب. إذا كانت الزمرة $\frac{H_{i+1}}{H_i}$ غير منتهية فإن الزمرة $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ تكون غير منتهية وبالتالي تكون دوارة وحسب المبرهنة (٣-١-٩) تكون الزمرة $\frac{H_{i+1}}{H_i}$ دوارة وغير منتهية. مما سبق نجد أن الزمرة $H$ هي M ـ زمرة.

٢ – لتكن $N$ زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $G$ عندئذ الجداء $G_iN$ زمرة جزئية من الزمرة $G$ وبما أن $N\subseteq G_iN$ وأن $N$ ناظمية في الزمرة $G$ فإن الزمرة $N$ تكون ناظمية في الزمرة $G_iN$ وبالتالي فإن $G_iN/N$ هي زمرة جزئية من الزمرة $G/N$ حيث $i=0,1,2,\cdots,n$. وبما أن $G_iN\subseteq G_{i+1}N$ فإننا نحصل على السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية من $G/N$ على الشكل

$$N=\frac{N}{N}=\frac{G_0N}{N}\subseteq\frac{G_1N}{N}\subseteq\frac{G_2N}{N}\subseteq\cdots\subseteq\frac{G_nN}{N}=\frac{G}{N}$$

لنبرهن الآن على أن الزمرة $\frac{G_iN}{N}$ ناظمية في $\frac{G_{i+1}N}{N}$. ليكن $\bar{y}\in\bar{g}_{i+1}.\frac{G_iN}{N}.\bar{g}_{i+1}^{-1}$ وذلك أياً كان $\bar{g}_{i+1}\in\frac{G_{i+1}N}{N}$. ومنه يوجد $\bar{g}_i\in\frac{G_iN}{N}$ يحقق $\bar{y}=\bar{g}_{i+1}\bar{g}_i.\bar{g}_{i+1}^{-1}$ وبالتالي

$$\bar{y}=(g_{i+1}N)(g_iN)(g_{i+1}N)^{-1}=(g_{i+1}g_ig_{i+1}^{-1})N$$

وبما أن الزمرة $G_i$ ناظمية في الزمرة $G_{i+1}$ نجد أن $g_{i+1}g_ig_{i+1}^{-1}\in G_i$ وبالتالي

$$\bar{y}=(g_{i+1}g_ig_{i+1}^{-1})N\in\frac{G_i}{N}\subseteq\frac{G_iN}{N}$$

مما سبق نجد أن الزمرة $\frac{G_iN}{N}$ ناظمية في $\frac{G_{i+1}N}{N}$ حيث $i=0,1,2,\cdots,n$.

إذا كانت الزمرة $\frac{G_{i+1}N}{N}\Big/\frac{G_iN}{N}$ منتهية يتم المطلوب.

لنفرض أن الزمرة $\frac{G_{i+1}N}{N}\Big/\frac{G_iN}{N}$ غير منتهية وبما أن $\frac{G_{i+1}N}{G_iN} \approx \frac{(G_{i+1}N)/N}{(G_iN)/N}$ نجد أن الزمرة $\frac{G_{i+1}N}{G_iN}$ غير منتهية وبالتالي تكون الزمرة $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ غير منتهية وحسب الفرض فإن الزمرة $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ دوارة أي أن الزمرة $\frac{G_{i+1}N}{G_iN}$ دوارة. مما سبق نجد أن الزمرة $G/N$ هي M ـ زمرة. ∘

لندرس الآن الشرط اللازم والكافي كي تكون زمرة ما عبارة عن M ـ زمرة.

**مبرهنة ١٢-٣-٢.**

لتكن $G$ زمرة و $N$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. الشروط التالية متكافئة:

١ - الزمرة $G$ هي M ـ زمرة.

٢ - كل من الزمرتين $N$ و $G/N$ عبارة عن M ـ زمرة.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). ينتج وبشكل مباشر من المبرهنة(١٢-٣-١).

(٢)⇐(١). بما أن كلاً من الزمرتين $G/N, N$ عبارة عن M ـ زمرة فإنه توجد سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من $N$ على الشكل

$$E = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_{n-1} \subseteq N_n = N$$

تحقق أن الزمرة $N_i$ ناظمية في الزمرة $N_{i+1}$ وأن الزمرة $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ إما منتهية أو دوارة غير منتهية، حيث $i = 0,1,2,\cdots(n-1)$. كذلك توجد أيضا سلسلة منتهية أخرى من الزمر الجزئية من الزمرة $G/N$ على الشكل

$$N = \frac{N}{N} = \frac{G_0}{N} \subseteq \frac{G_1}{N} \subseteq \frac{G_2}{N} \subseteq \cdots \subseteq \frac{G_{m-1}}{N} \subseteq \frac{G_m}{N} = \frac{G}{N}$$

تحقق أن الزمرة $\frac{G_i}{N}$ ناظمية في الزمرة $\frac{G_{i+1}}{N}$ وأن الزمرة $\frac{G_{i+1}/N}{G_i/N}$ إما منتهية أو دوارة غير منتهية، حيث $i = 0,1,2,\cdots(m-1)$. لنشكل السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية من الزمرة $G$ التالية:

$$E = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_n \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_{m-1} \subseteq G_m = G$$

وهذه السلسلة هي سلسلة ناظمية وأن زمر الخارج لهذه السلسلة إما منتهية أو دوارة غير منتهية. وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ هي M ـ زمرة. ∘

**تعريف.**

نقول عن الزمرة $G$ إنها تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية إذا كانت كل مجموعة جزئية وغير خالية من الزمر الجزئية من $G$ والتي كل منها لا يساوي $G$ تحوي عنصراً أعظمياً.

**مبرهنة ١٢-٣-٣.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $G$. إذا كانت كل من الزمرتين $H$ و $G/H$ تحققان الشرط الأعظمي للزمر الجزئية عندئذ الزمرة $G$ تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية.

**البرهان.**

لنفرض أن كلاً من الزمرتين $H$ و $G/H$ تحققان الشرط الأعظمي للزمر الجزئية ولتكن $S$ مجموعة غير خالية من الزمر الجزئية من $G$. ولنأخذ المجموعة

$$S_H = \{N \cap H; \quad N \in S\}$$

فنجد أن المجموعة $S_H$ هي مجموعة جزئية من الزمر الجزئية من $H$ وحسب الفرض فإن المجموعة $S_H$ تحوي عنصراً أعظمياً وليكن $A$.

من جهة أخرى بما أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$ فإن الجداء $LH$ زمرة جزئية من $G$ وذلك $\forall L \in S$ وبما أن $H \subseteq LH$ فإن الزمرة $H$ تكون ناظمية في $LH$ ومنه فإن $LH/H$ زمرة جزئية من $G/H$ وذلك $\forall L \in S$. لنأخذ المجموعة

$$S^* = \{\frac{LH}{H}; \quad L \in S : L \cap H = A\}$$

فنجد أن $S^*$ هي مجموعة غير خالية من الزمر الجزئية من الزمرة $G/H$ وحسب الفرض فإن المجموعة $S^*$ تحوي عنصراً أعظمياً وليكن $B$ ومنه يوجد $K \in S$ بحيث $B = K \cap H$ وأن $B = \frac{KH}{H}$. لنبرهن على أن العنصر $K$ هو عنصر أعظمي

في $S$. لنفرض جدلاً أن العنصر $K$ ليس أعظمياً في $S$ عندئذ يوجد $K' \in S$ بحيث $K \subset K'$ ومنه $K' \cap H \in S_H$ وبما أن $A = K \cap H \subseteq K' \cap H$ نجد أن $K' \cap H = A$ وذلك لأن العنصر $A$ هو عنصر أعظمي في $S_H$. من جهة أخرى، بما أن $K' \cap H = A$ فإن $\frac{K'H}{H} \in S^*$ كذلك بما أن $K \subset K'$ فإن $KH \subset K'H$ وبالتالي $B = \frac{KH}{H} \subset \frac{K'H}{H}$ وبما أن العنصر $B$ أعظمي في $S^*$ نجد أن $\frac{K'H}{H} = B$.
من جهة أخرى، بما أن $K \subset K'$ يوجد عنصر $x \in K'$ بحيث $x \notin K$ ومنه $xH \in \frac{K'H}{H} = B$ وبما أن $B = \frac{KH}{H}$ يوجد $y \in K$ بحيث $xH = yH$ ولكون $x \in xH = yH$ يوجد $h \in H$ بحيث $x = yh$ ومنه

$$h = y^{-1}x \in H \cap K' = A = H \cap K$$

نجد أن $x = yh \in K$ وهذا يناقض كون $x \notin K$. مما سبق نجد أن $K = K'$ أي أن العنصر $K$ هو عنصر أعظمي في $S$ وبالتالي تكون الزمرة $G$ محقق للشرط الأعظمي للزمر الجزئية. ∘

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \cdots \subseteq K_n \subseteq \cdots$$

سلسلة متزايدة من الزمر الجزئية من الزمرة $G$ نقول عن السلسلة السابقة أنها تنقطع إذا وجد دليل $k \in N^*$ يحقق $K_k = K_n$ وذلك أياً كان $n \ge k$.

لندرس الآن العلاقة بين الزمر المحققة لشرط انقطاع السلاسل المتزايدة و الزمر المحقق للشرط الأعظمي وذلك من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة ١٢-٣-٤.**

لأجل أي زمرة $G$ الشروط التالية متكافئة:

١ – الزمرة $G$ تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية.

٢ – كل سلسلة متزايدة من الزمر الجزئية من الزمرة $G$ تنقطع.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). لتكن

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_r \subset \cdots$$

سلسلة متزايدة من الزمر الجزئية من $G$. عندئذ المجموعة

$$\Im = \{A_i; \quad i = 1,2,3,\cdots\}$$

حسب الفرض تحوي عنصراً أعظمياً وليكن $A_n$. ليكن $k \in N^*$ بحيث $k > n$ عندئذ $A_k = A_n$ لأن $A_k \in \Im$ وأن $A_n \subseteq A_k$ وبما أن العنصر $A_n$ أعظمي في $\Im$ نجد أن $A_k = A_n$.

(٢)⇐(١). لتكن $\Im$ مجموعة جزئية وغير خالية من الزمرة الجزئية من $G$. ولنفرض أن المجموعة $\Im$ لا تحوي عنصراً أعظمياً عندئذ أياً كان $A_1 \in \Im$ فإنه يوجد $A_2 \in \Im$ بحيث $A_1 \subset A_2$ وبما أن العنصر $A_2$ ليس أعظمياً في $\Im$ فإنه يوجد $A_3 \in \Im$ بحيث $A_2 \subset A_3$ وهكذا. لنفرض أنه تم الحصول على العنصر $A_n \in \Im$ الذي يحقق $A_{n-1} \subset A_n$ ولكون العنصر $A_n$ ليس أعظميا في $\Im$ فإنه يوجد $A_{n+1} \in \Im$ بحيث $A_n \subset A_{n+1}$. نتابع بهذا الشكل فنحصل على السلسلة

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$$

وهذه السلسلة هي سلسلة متزايدة من الزمر الجزئية من الزمرة $G$ وغير منقطعة وهذا يناقض الفرض. مما سبق نجد أن المجموعة $\Im$ تحوي عنصراً أعظمياً وبالتالي الزمرة $G$ تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية. ∘

يعد السؤال التالي: متى تكون كل زمرة جزئية من زمرة ما منتهية التوليد، واحداً من الأسئلة الهامة في نظرية الزمر. المبرهنة التالية تعطينا الشرط اللازم والكافي كي تكون كل زمرة جزئية من زمرة ما زمرة منتهية التوليد.

**مبرهنة ١٢-٣-٥.**

لتكن $G$ زمرة. الشروط التالية متكافئة:

١ – الزمرة $G$ تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية.

٢ – كل زمرة جزئية من الزمرة $G$ تكون منتهية التوليد.

**البرهـــان.**

(١)⇐(٢). لنفرض أنه توجد في الزمرة $G$ زمرة جزئية $H$ ليست منتهية التوليد ومنه يوجد $g_1 \in H$ بحيث $H_1 = \langle g_1 \rangle \neq H$ وبما أن الزمرة $H$ ليست منتهية التوليد يوجد $g_2 \in H$ بحيث $g_2 \notin H$ وأن $H_2 = \langle g_1, g_2 \rangle \neq H$. لنفرض أنه تم الحصـــول على العنصر $g_n \in H$ بحيث $g_n \notin H_{n-1}$ وأن

$$H_n = \langle g_1, g_2, g_3, \cdots, g_n \rangle \neq H$$

وبما أن الزمرة $H$ ليست منتهية التوليد فإنه يوجد $g_{n+1} \in H$ بحيث $g_{n+1} \notin H_n$ وأن

$$H_{n+1} = \langle g_1, g_2, g_3, \cdots, g_n, g_{n+1} \rangle \neq H$$

نتابع بهذا الشكل فنحصل على السلسلة المتزايدة من الزمر الجزئية من $G$

$$H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \cdots \subset H_n \subset H_{n+1} \subset \cdots$$

وهذه السلسلة لا تنقطع وحسب التمهيدية (١٢-٣-٤) فإن الزمرة $G$ لا يحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية وهذا مناقض للفرض. ومنه نجد أن كل زمرة جزئية مـــن $G$ تكون منتهية التوليد.

(٢)⇐(١). لنفض جدلاً أن الزمرة $G$ لا تحقق الشرط الأعظمـــي للزمـــر الجزئيـــة وحسب التمهيدية (١٢-٣-٤) توجد في $G$ سلسلة غير منتهية من الزمر الجزئية

$$H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \cdots \subset H_n \subset H_{n+1} \subset \cdots$$

وهذه السلسلة لا تنقطع. لنضع $K = \bigcup_{i \in I} H_i$ فنجد أن $K$ زمرة جزئية من $G$ وحسب الفرض فإن الزمرة $K$ منتهية التوليد، ومنه توجد عناصـــر $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n \in K$ بحيث $K = \langle y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n \rangle$ وبما أن $y_i \in \bigcup_{i \in I} H_i$ فإنه يوجـــد دليـــل $t$ بحيـــث $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n \in H_t$ ومنه نجد أن $H_t = H_{t+1}$ وهذا مرفوض فرضا. مما سبق نجد أن الزمرة $G$ تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية. ▫

المبرهنة التالية تبين لنا أياً من صفوف الزمرة تكون محققـــة للشـــرط الأعظمـــي وبالتالي تكون زمرها الجزئية منتهية التوليد.

**مبرهنـــة ١٢-٣-٦.**

كل $M$ – زمرة تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية.

**البرهـــان.**

لنفرض أن الزمرة $G$ هي $M$ – زمرة عندئذ الزمرة $G$ تملـــك سلســـلة ناظميـــة منتهية من الزمر الجزئية

$$E = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n = G$$

والتي تحقق أن الزمرة $\frac{A_{i+1}}{A_i}$ إما منتهية أو دوارة وغير منتهية $i = 0,1,2,\cdots n$.

لنبرهن بالاستقراء أن الزمر الجزئية $A_i$ تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية.

من أجل $i = 1$ لدينا $A_1 = \frac{A_1}{A_0}$ هي إما زمرة منتهية أو دوارة وغير منتهية، ومنه فإن أي زمرة جزئية من $A_1$ إما منتهية أو دوارة وغير منتهية ومنه فإن كل زمرة جزئية من $A_1$ هي زمرة منتهية التوليد وحسب المبرهنة (١٢-٣-٥) تكون الزمرة $A_1$ محققة للشرط الأعظمي للزمر الجزئية. كذلك بما أن الزمرة $\frac{A_2}{A_1}$ إما منتهية أو دوارة وغير منتهية فإن أي زمرة جزئية من $\frac{A_2}{A_1}$ تكون منتهية التوليد وبالتالي تكون الزمـــرة $\frac{A_2}{A_1}$ محققة للشرط الأعظمي للزمر الجزئية وحسب المبرهنة (١٢-٣-٣) فإن الزمرة $A_2$ تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية. لنفـــرض أن الزمـــرة $A_{n-1}$ تحقـــق الشـــرط الأعظمي للزمر الجزئية، عندئذ وبما أن الزمرة $\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{G}{A_{n-1}}$ إما منتهيـــة أو دوارة وغير منتهية، ومنه فإن أي زمرة جزئية من $\frac{G}{A_{n-1}}$ تكون منتهيـــة التوليـــد وبالتـــالي الزمرة $\frac{G}{A_{n-1}}$ تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية وحسب المبرهنـــة (١٢-٣-٣) فإن الزمرة $G$ تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية. ▫

# تمـــاريـــن محلـــولـــة ( ١٢ )

١ – لتكن $G$ زمرة و $A,B$ زمراً جزئية من الزمرة $G$ عندئذ:

$$\langle [A,B]\rangle = \langle [B,A]\rangle$$

**الحـــل.**

ليكن $[a,b]\in[A,B]$ عندئذ $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}=(bab^{-1}a^{-1})^{-1}=[b,a]^{-1}$ وبما أن $[b,a]\in[B,A]$ فإن $[a,b]=[b,a]^{-1}\in\langle[B,A]\rangle$ ومنه $\langle[A,B]\rangle\subseteq\langle[B,A]\rangle$.
بشكل مشابه نجد أن $\langle[B,A]\rangle\subseteq\langle[A,B]\rangle$. ومنه $\langle[A,B]\rangle=\langle[B,A]\rangle$. ٥

٢ – لتكن $A,B$ زمراً جزئية ناظمية من الزمرة $G$ عندئذ:

$$\langle[A,B]\rangle\subseteq A\cap B$$

**الحـــل.**

بما أن الزمرة $A$ ناظميـة فـي $G$ فإنـه حسـب التمهيديـة (١٢-٢-١) نجـد $\langle[A,B]\rangle\subseteq A$. من جهة أخرى وحسب التمرين (١) فإن $\langle[A,B]\rangle=\langle[B,A]\rangle\subseteq B$.
ومنه نجد $\langle[A,B]\rangle\subseteq A\cap B$. ٥

٣ – لتكن $H,K$ زمراً جزئية من الزمرة $G$ بحيث $H\subseteq K$ وأن الزمرة $K$ ناظمية في $G$. عندئذ:

١- الزمرة $H$ ناظمية في $G$ عندما وفقط عندما $\langle[H,G]\rangle\subseteq H$.

٢ - $\frac{H}{K}\subseteq Z(\frac{G}{K})$ عندما وفقط عندما $\langle[H,G]\rangle\subseteq K$.

**الحـــل.**

١ – لنفرض أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$ عندئذ وحسب التمهيدية (١٢-٢-١) فإن $\langle[H,G]\rangle\subseteq H$.

لنفرض أن $\langle[H,G]\rangle\subseteq H$ عندئذ أياً كان $g\in G,h\in H$ فإن

$$ghg^{-1}=(ghg^{-1}h^{-1})h\in[H,G].H\subseteq\langle[H,G]\rangle H\subseteq H$$

ومنه نجد أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$.

٢ – لنفرض أن $\frac{H}{K}\subseteq Z(\frac{G}{K})$ عندئذ أياً كان $g\in G,h\in H$ فإن

$$[h,g]K=(hgh^{-1}g^{-1})K=(hK)(gK)(h^{-1}K)(g^{-1}K)$$

وبما أن $hK\in\frac{H}{K}\subseteq Z(\frac{G}{K})$ فإن

$$[h,g]K=(hK)(gK)(h^{-1}K)(g^{-1}K)=(gK)(hK)(h^{-1}K)(g^{-1}K)=$$
$$=(gK)(g^{-1}K)=K$$

وهذا يبين لنا أن $[h,g]\in K$ وبالتالي $\langle[H,G]\rangle\subseteq K$.

لنفـــرض أن $\langle[H,G]\rangle\subseteq K$ ولـــيكن $gK\in\frac{G}{K},hK\in\frac{H}{K}$ ولنبـــرهن أن $(hK)(gK)=(gK)(hK)$. لدينا

$$(hgh^{-1}g^{-1})K=[h,k]K\subseteq[H,G]K\subseteq\langle[H,G]\rangle\subseteq K$$

ومنه $hgh^{-1}g^{-1}\in K$ وبالتـالي $(hK)(gK)=(gK)(hK)$. ممـا سـبق نجـد أن $\frac{H}{K}\subseteq Z(\frac{G}{K})$. ٥

٤ – لتكن $H,K$ زمراً جزئية ناظمية فـي الزمـرة $G$ ولنفـرض أن $G=H\times K$.
ولتكن $M$ زمرة جزئية من $G$ بحيث $H\subseteq M$. عندئذ

١ - $M=H\times(M\cap K)$.

٢ - الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة الجزئية $M$ ناظمية في $G$ هو أن تكـون الزمرة الجزئية $M\cap K$ ناظمية في $K$.

**الحـــل.**

١ – بما أن الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$ وأن $H\subseteq M$، فإن الزمرة $H$ تكون ناظمية في $M$. لنبرهن على أن الزمرة $M\cap K$ ناظمية في $M$، أي لنبرهن على أنه أياً كان $g\in M$ فإن $g(M\cap K)g^{-1}\subseteq M\cap K$.

ليكن $x\in g(M\cap K)g^{-1}$ عندئذ يوجـد $y\in M\cap K$ بحيـث $x=gyg^{-1}$ وبمـا أن $g,y\in M$ فإن $x=gyg^{-1}\in M$. من جهة أخرى، بما أن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ وأن $y\in K$ فـإن $x=gyg^{-1}\in K$ ومنـه $x\in M\cap K$ وهـذا يبـين لنـا أن

الزمـــرة $M \cap K$ ناظميـــة فـــي $M$. وبمـــا أن $M \cap K, H \subseteq M$ فـــإن $H(M \cap K) \subseteq M$. لـــيكن $z \in M$ عندئـــذ $z \in G = H \times K$ ومنـــه يوجد $h \in H, k \in K$ بحيث $z = hk$ ومنه $h^{-1}z = k \in K$ وأيضا $h^{-1}z = k \in M$ أي أن $z = hk \in H.(M \cap K)$. كذلك فإن

$$H \cap (K \cap M) = (H \cap K) \cap M = E$$

مما سبق نجد أن $M = H \times (M \cap K)$.

٢ – لزوم الشرط. لنفرض أن الزمرة $M$ ناظمية في $G$ وليكن $k \in K$ ولنبرهن على أن $k(M \cap K)k^{-1} \subseteq M \cap K$. لـــيكن $y \in k(M \cap K)k^{-1}$ عندئـــذ يوجد $x \in M \cap K$ بحيث $y = kxk^{-1}$ وبما أن $x \in M$ فإن $y = kxk^{-1} \in M$ ولكون الزمرة $K$ ناظمية في $G$ وأن $x \in K$ فإن $y = kxk^{-1} \in K$ ومنه $y \in M \cap K$ أي أن الزمرة $M \cap K$ ناظمية في $K$.

كفاية الشـــرط. لنفـــرض أن الزمـــرة $M \cap K$ ناظميـــة فـــي $K$ ولنبـــرهن علـــى أن $gMg^{-1} \subseteq M$ وذلك أياً كان $g \in G$. لـــيكن $x \in gMg^{-1}$ عندئـــذ يوجـــد $y \in M$ بحيث $x = gyg^{-1}$ وحسب (١) وبما أن $M = H \times (M \cap K)$ يوجـــد $h \in H, k \in K$ بحيث $y = hk$ ومنه $x = gyg^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1})$ وبما أن الزمـــرة $H$ ناظميـــة في $G$ وأن $h \in H$ نجد أن $ghg^{-1} \in H$. من جهة أخرى، بما أن $K$ ناظميـــة فـــي $G$ وأن $x \in K$ فـــإن $gkg^{-1} \in K$. كـــذلك بمـــا أن $g \in G = H \times K$ ومنـــه يوجد $h_0 \in H, k_0 \in K$ بحيث $z = h_0k_0$ ومنه

$$gkg^{-1} = h_0k_0k_0k_0^{-1}h_0^{-1} = h_0(k_0k_0k_0^{-1})h_0^{-1}$$

وبما أن $k \in K \cap M$ وأن $M \cap K$ ناظمية في $K$ نجد أن

$$y = gkg^{-1} \in h_0(K \cap M)h_0^{-1} \subseteq (h_0Kh_0^{-1}) \cap (k_0Mh_0^{-1}) \subseteq K \cap M$$

مما سبق نجد أن الزمرة $M \cap K$ ناظمية في $K$. ∘

## تمـــاريـــن ( ١٢ )

١ – لتكن $G$ زمرة و $x, y, z \in G$. أثبت أن

- $[xy, z] = [x, z][x, y, z][y, z]$.
- $[z, xy][y, zx][x, yz] = 1$.
- $y^{-1}[x, y^{-1}, z]yz^{-1}[y, z^{-1}, x]zx^{-1}[z, x^{-1}, y]x = 1$.

٢ – لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كـــي تكـــون الزمـــرة $H$ ناظميـــة فـــي $G$ هـــو أن يتحقـــق $[h, g] \in H$ وذلـــك أيـــاً كان $g \in G, h \in H$.

٣ – لتكن $G$ زمرة و $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. أثبت أن

$$(\frac{G}{K})' = \frac{G'K}{K}$$

٤ – لتكن $G$ زمرة و $A$ زمرة تبديلية. إذا كان $\varphi : G \to A$ تشاكلاً زمرياً أثبت أن

- $G' \subseteq Ker\varphi$.
- $Hom(G, A) \approx Hom(G/G', A)$.

٥ – لتكن $G$ زمرة و $H, K$ زمرة جزئية من $G$. أثبت أن $\langle [H, K] \rangle$ زمرة جزئيـــة ناظمية في $\langle H, K \rangle$.

٦ – لتكن $G$ زمرة و $H, K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. أثبت أن $\langle [H, K] \rangle$ زمرة جزئية ناظمية في $G$.

# الفصل الثالث عشر

# الزمر البسيطة

تعد الزمرة البسيطة واحدة من الأنواع الهامة في نظرية الزمر وأهميتها تعادل أهمية الأعداد الأولية بالنسبة إلى نظرية الأعداد ويعد *Calois* أول من درس الزمرة البسيطة وذلك قبل حوالي ١٧٠ عاماً.

وقبل البدء بدراسة الزمر البسيطة سوف نبدأ بشيء من التفصيل بدراسة الزمر الجزئية الأعظمية، والتعرف إلى زمرة فراتيني $Fr(G)$ وأثرها في دراسة الزمرة. ومن ثم نلقي الضوء بإيجاز على الزمر الجزئية الأصغرية والتعرف إلى $Soc(G)$.

## ١٣-١. الزمر الجزئية الأعظمية.

**تمهيد.**

لتكن $G \neq E$ زمرة و $\mathfrak{I}$ مجموعة الزمر الجزئية من $G$ والتي كل منها لا يساوي $G$. وبما أن $E$ زمرة جزئية من $G$ وأن $G \neq E$ فإن $E \in \mathfrak{I}$ ومنه $\mathfrak{I} \neq \Phi$ وهي مرتبة جزئيا بالنسبة إلى علاقة الاحتواء. بالاعتماد على ذلك يمكننا التحدث عن العناصر الأعظمية في المجموعة $\mathfrak{I}$. لأجل ذلك سوف ندخل المفهوم التالي:

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $\mathfrak{I}$ مجموعة الزمر الجزئية من $G$ والتي كل منها لا يساوي $G$. نقول عن الزمرة الجزئية $H \in \mathfrak{I}$ إنها أعظمية في $G$ إذا كانت $H$ عنصراً أعظمياً في $\mathfrak{I}$.

بعض الشروط المكافئة لمفهوم الزمر الجزئية الأعظمية نوردها من خلال التمهيدية التالي:

**تمهيدية ١٣-١-١.**

لتكن $G$ زمرة و $H \neq G$ زمرة جزئية من $G$. الشروط التالية متكافئة:

١ – الزمرة الجزئية $H$ أعظمية في $G$.

٢ – من أجل أي زمرة جزئية $D$ من $G$ تحقق $H \subseteq D \subset G$ فإن $H = D$.

٣ – لا توجد في $G$ زمر جزئية $B$ تحقق $H \subset B \subset G$.

٤ – من أجل أي زمرة جزئية $K$ من $G$ تحقق $H \subset K$ فإن $K = G$.

**البرهان.**

لتكن $\Im$ مجموعة الزمر الجزئية من $G$ والتي كل منها لا يساوي $G$.

(١)⇐(٢). لنفرض أن الزمرة الجزئية $H$ أعظمية في $G$ ولتكن $D$ زمرة جزئية من $G$ تحقق $H \subseteq D \subset G$ عندئذ $D \in \Im$ وبما أن $H$ عنصر أعظمي في $\Im$ وأن $H \subseteq D$ فإن $H = D$.

(٢)⇐(٣). لنفرض جدلاً أنه توجد في $G$ زمرة جزئية $B$ تحقق $H \subset B \subset G$ وحسب (٢) فإن $H = B$ وهذا غير ممكن. وبالتالي لا توجد في $G$ زمرة جزئية $B$ تحقق $H \subset B \subset G$.

(٣)⇐(٤). لتكن $K$ زمرة جزئية من $G$ تحقق $H \subset K$ وحسب (٣) فإن $K = G$ لأنه لا توجد في $G$ زمر جزئية $H \subset K \subset G$.

(٤)⇐(١). لتكن $F$ زمرة جزئية من $G$ بحيث $F \neq G$ وأن $H \subseteq F$. إذا كان $H \neq F$ نحصل على تناقض مع الفرض ومنه $H = F$، أي أن الزمرة $H$ أعظمية في $G$. ▫

**ملاحظة.**

إذا كانت الزمرة $G$ غير منتهية فليس من الضروري أن تحوي زمرة جزئية أعظمية.

**تمهيدية ١٣-١-٢.**

توجد في كل زمرة منتهية $G \neq E$ زمرة جزئية أعظمية.



**البرهان.**

بما أن الزمرة $G$ منتهية فإن مجموعة الزمر الجزئية من $G$ والتي كل منها لا يساوي $G$ تكون منتهية وبالتالي فهي تحوي عنصراً أكبر وهذا العنصر هو زمرة جزئية أعظمية. ▫

**نتيجة.**

إذا كانت الزمرة $G$ منتهية فإن كل زمرة جزئية $H \subset G$ تكون محتواة في زمرة جزئية أعظمية من $G$.

**مبرهنة ١٣-١-٣.**

لتكن $G$ زمرة و $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ ولتكن $M$ زمرة جزئية من $G$ بحيث $K \subseteq M$. الشروط التالية متكافئة:

١ – الزمرة الجزئية $M$ أعظمية في $G$.

٢ – الزمرة الجزئية $\frac{M}{K}$ أعظمية في $\frac{G}{K}$.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). لنفرض أن الزمرة الجزئية $M$ أعظمية في $G$. ولتكن $\overline{D} \neq \frac{G}{K}$ زمرة جزئية من الزمرة $\frac{G}{K}$ بحيث $\frac{M}{K} \subseteq \overline{D}$. وحسب المبرهنة (٥-٢-٣) فإن $\overline{D} = \frac{H}{K}$ حيث $H$ زمرة جزئية من $G$ تحقق $K \subseteq H \neq G$. وبما أن $\frac{M}{K} \subseteq \frac{H}{K}$ فإن $M \subseteq H$ ولكون الزمرة $M$ أعظمية في $G$ فإن $M = H$ وبالتالي فإن $\overline{D} = \frac{M}{K}$.

(٢)⇐(١). لنفرض أن الزمرة $\frac{M}{K}$ أعظمية في $\frac{G}{K}$ عندئذ $M \neq G$. لتكن $F \neq G$ زمرة جزئية من $G$ بحيث $M \subseteq F$ ولنبرهن على أن $M = F$. بما أن $K \subseteq M \subseteq F$ وأن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ فإن الزمرة $K$ ناظمية في $F$ ومنه

فإن $\frac{F}{K}$ زمرة جزئية في $\frac{G}{K}$ وأن $\frac{M}{K} \subseteq \frac{F}{K}$ لأن $M \subseteq F$. ولكون الزمـــرة $\frac{M}{K}$ أعظمية في $\frac{G}{K}$ عندئذ إما $\frac{F}{K} = \frac{G}{K}$ أو $\frac{M}{K} = \frac{F}{K}$.

إذا كانت $\frac{F}{K} = \frac{G}{K}$ عندئذ أياً كان $g \in G$ فإن $gK \in \frac{G}{K} = \frac{F}{K}$ أي أن $g \in F$ ومنـــه $G = F$ وهذا غير ممكن، وبالتالي $\frac{M}{K} = \frac{F}{K}$. وهكذا نجد أنه أياً كـــان $x \in F$ فـــإن $xK \in \frac{F}{K} = \frac{M}{K}$ أي أن $x \in M$ وبالتالي $M = F$. مما ســبق نجــد أن الزمـــرة $M$ أعظمية في $G$. ◦

نأتي الآن إلى دراسة تقاطع الزمر الجزئية الأعظمية لزمرة ما وذلـــك فـــي حـــال وجودها.

**تعريـــف.**

لتكن $G$ زمرة. نسمي تقاطع جميع الزمر الجزئية الأعظمية في $G$ زمرة فراتينـــي *Frattini* ونرمز لها $Fr(G)$.

إذا لم تحو الزمرة $G$ زمراً جزئية أعظمية نعتبر $Fr(G) = G$.

أولى خواص الزمرة $Fr(G)$ سنوردها من خلال التمهيدية التالية:

**تمهيديـــة ١٣-١-٤.**

لتكن $G$ زمرة. عندئذ:

١ – إذا كانت $M$ زمرة جزئية أعظمية في $G$ عندئذ $\alpha(M)$ زمرة جزئية أعظميـــة في $G$ وذلك أياً كان $\alpha \in Aut(G)$.

٢ – الزمرة $Fr(G)$ متميزة في $G$.

٣ – الزمرة $Fr(G)$ ناظمية في $G$.

**البرهـــان.**

١ – ليكن $\alpha \in Aut(G)$ ولنفرض أن $M$ زمرة جزئية أعظميـــة فـــي $G$ عندئـــذ $\alpha(M)$ زمرة جزية من $G$ وأن $\alpha(M) \neq G$. لتكن $B$ زمرة جزئية مـــن $G$ بحيـــث



$\alpha(M) \subset B$ ولنفرض أن $A = \alpha^{-1}(B)$ عندئذ $A$ زمرة جزئية مـــن $G$. كمـــا أن $M \subset A$ لأنه أياً كان $m \in M$ فـــإن $\alpha(m) \in B$ ومنـــه $m \in \alpha^{-1}(B) = A$ أي أن $M \subseteq A$. لنفرض أن $M = A$ عندئذ $\alpha(M) = \alpha(A) = B$ وهذا غير ممكن. ممـــا سبق نجد أن $M \subset A$ وبما أن الزمرة $M$ أعظمية في $G$ نجد أن $A = G$ وبالتالي

$$G = \alpha(G) = \alpha(A) = B$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $\alpha(M)$ أعظمية في $G$.

٢ – لنبرهن على أن $\alpha(Fr(G)) \subseteq Fr(G)$ وذلك أياً كان $\alpha \in Aut(G)$.
ليكن $\alpha \in Aut(G)$ و $x \in Fr(G)$ ولنفرض أن $\alpha(x) \notin Fr(G)$ عندئذ توجد زمـــرة جزئية أعظمية $M$ في $G$ بحيث $\alpha(x) \notin M$ ومنه $x \notin \alpha^{-1}(M)$ وهذا غيـــر ممكـــن حسب (١) لأن الزمرة $\alpha^{-1}(M)$ أعظمية في $G$. وهذا يبين لنـــا أن $\alpha(x) \in Fr(G)$ وبالتالي $\alpha(Fr(G)) \subseteq Fr(G)$ وحسب التمهيدية (٧-٩) نجـــد أن الزمـــرة $Fr(G)$ متميزة في $G$.

٣ – بما أن الزمرة $Fr(G)$ متميزة في $G$ وحسب المبرهنة (٧-٧) تكـــون الزمـــرة $Fr(G)$ ناظمية في $G$. ◦

لأجل معرفة العناصر التي تتكون منها الزمرة $Fr(G)$، لابد لنا من مفهوم جديـــد سنورده من خلال التعريف التالي:

**تعريـــف.**

لتكن $G$ زمرة و $x \in G$. نقول عن العنصر $x$، إنه لـــيس مولـــداً للزمـــرة $G$ إذا تحقق الشرط: من أجل أي مجموعة جزئية وغير خالية $S$ من $G$ تحقق $G = \langle S, x \rangle$ ينتج أن $G = \langle S \rangle$.

المبرهنة التالية تبين لنا طبيعة عناصر الزمرة $Fr(G)$.

**مبرهنـــة ١٣-١-٥.**

لتكن $G$ زمرة و $g \in G$. الشروط التالية متكافئة:

١ – العنصر $g$ ليس مولداً للزمرة $G$.

٢ - $g \in Fr(G)$.

**البرهــان.**

(١)⇐(٢). لنفرض أن العنصر $g$ لـيس مولـداً للزمـرة $G$. وأن $g \notin Fr(G)$ عندئذ توجد زمرة جزئية أعظمية $M$ من $G$ بحيث $g \notin M$. ومنه فإن $M \subset \langle M,g\rangle$ ولكون الزمرة $M$ أعظمية نجد أن $G=\langle M,g\rangle$ وبما أن العنصر $g$ لـيس مولـداً للزمرة $G$ نجد أن $G=\langle M\rangle = M$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $g\in Fr(G)$.

(٢)⇐(١). لنفرض أن $g\in Fr(G)$ ولتكن $S$ مجموعة جزئية وغير خالية مـن $G$ تحقق $G=\langle S,g\rangle$. لنفرض جدلاً أن $G\neq\langle S\rangle$ عندئذ $g\notin\langle S\rangle$ لأنه إذا كان $g\in\langle S\rangle$ نجد أن $G=\langle S,g\rangle=\langle S\rangle$ وهذا مرفوض. لنأخذ المجموعة

$$\Im=\{K : K \; \text{زمرة جزئية من } G; \quad \langle S\rangle\subseteq K, g\notin K\}$$

فنجد أن المجموعة $\Im$ غير خالية لأن $\langle S\rangle\in\Im$ كما أن المجموعة $\Im$ مرتبـة جزئيـا بالنسبة إلى علاقة الاحتواء. لتكن $\Im_0$ مجموعة جزئية من $\Im$ ومرتبة كليا ولنفرض أن $N=\bigcup_{A\in\Im}A$ عندئذ وبما أن المجموعة $\Im_0$ مرتبة كليا وحسـب التمهيديـة (٢-١-٧) فإن $N$ زمرة جزئية من $G$ كما أن $g\notin N$ لأنه إذا كان $g\in N$ فإنه يوجـد $A\in\Im_0$ بحيث $g\in A$ وهذا غير ممكن. وهكذا نجد أن $N\in\Im$ كما أن $A\subseteq N$ وذلـك أيـاً كان $A\in\Im_0$. مما سبق نجد أن $N$ هو حد أعلى للمجموعة $\Im_0$ في $\Im$ وحسب تمهيدية زورن يوجد في $\Im$ عنصر أعظمي ولـيكن $M$. بمـا أن $M\in\Im$ فـإن $\langle S\rangle\subseteq M$ وأن $g\notin M$. لنبرهن على أن الزمرة $M$ أعظمية في $G$. لـتكن $H$ زمـرة جزئيـة مـن $G$ بحيـث $M\subset H\subseteq G$ عندئـذ $H\notin\Im$ ومنـه $g\in H$ وبالتالي $G=\langle S,g\rangle\subseteq H\subseteq G$ أي أن $H=G$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $M$ أعظمية في $G$. وأن $g\notin M$ وهذا يناقض كون $g\in Fr(G)$. ممـا سـبق نجـد أن $G=\langle S\rangle$ وبالتالي العنصر $g$ ليس مولداً للزمرة $G$. ₀

خواص أخرى لزمرة فراتيني وخاصة علاقتها بالمشتق الأول للزمرة تخبرنا عنهـا المبرهنة التالية:



**مبرهنـة ١٣-١-٦.**

لتكن $G$ زمرة. الشروط التالية متكافئة:

١ - كل زمرة جزئية أعظمية في $G$ تكون ناظمية.

٢ - $G'\subseteq Fr(G)$.

**البرهـان.**

(١)⇐(٢). لتكن $M$ زمرة جزئية أعظمية في $G$ وحسب الفرض فإن الزمرة $M$ ناظمية وبالتالي تكون الزمرة $\frac{G}{M}$ بسيطة ومنه $(\frac{G}{M}:1)=p$ حيث $p$ عدد أولي، أي أن الزمـرة $\frac{G}{M}$ دوارة وبالتـالي فهـي تبديليـة وحسـب المبرهنـة (١٢-١-٢) يكون $G'\subseteq M$. مما سبق نجد أن $G'\subseteq Fr(G)$.

(٢)⇐(١). لنفرض أن $G'\subseteq Fr(G)$ ولتكن $M$ زمرة جزئية أعظميـة فـي $G$، عندئذ $G'\subseteq M$ وحسب المبرهنة (١٢-١-٢) تكون الزمرة $M$ ناظمية في $G$. ₀

**نتيجـة.**

إذا كانت الزمرة $G$ عديمة القوى فإن $G'\subseteq Fr(G)$.

**البرهـان.**

بما أن الزمرة $G$ عديمة القوى فإنه حسب المبرهنة (١٢-٢-٥) تكون كل زمـرة جزئية أعظميـة فـي $G$ ناظميـة وبالاعتمـاد علـى المبرهنـة (١٢-١-٦) نجـد أن $G'\subseteq Fr(G)$. ₀

المبرهنة التالية تبين لنا أنه إذا كانت الزمرة الجزئية $Fr(G)$ منتهية التوليـد فـإن الزمرة $Fr(G)$ تلعب دور العنصر الحيادي بالنسبة إلى عملية ضرب الزمر الجزئيـة المساوي للزمرة $G$.

**مبرهنـة ١٣-١-٧.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية من $G$. إذا كانت الزمرة $Fr(G)$ منتهية التوليـد وأن $G=Fr(G).H$ فإن $G=H$.

البرهـان.

لنفـرض أن $Fr(G)=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$ وبمـا أن $G=Fr(G).H$ نجـد أن $G=\langle H,x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$ وبما أن العناصر $x_1,x_2,\cdots,x_n\in Fr(G)$ فإن العناصـر $x_1,x_2,\cdots,x_n$ هي عناصر ليست مولدة للزمرة $G$ وحسب المبرهنة (١٣-١-٥) نجد أن $G=\langle H\rangle=H$ ₒ.

**مبرهنـة ١٣-١-٨.**

لتكن $G$ زمرة و $F=Fr(G)$ ولتكن $S$ مجموعة جزئية من $G$ وغيـر خاليـة. إذا كانت الزمرة $F$ منتهية التوليد وأن $\frac{G}{F}=\langle F.x:x\in S\rangle$ عندئذ $G=\langle S\rangle$.

البرهـان.

لنفرض أن $H=\langle S\rangle$ وبما أن الزمرة $F$ ناظمية في $G$ فإن الجداء $HF$ هو زمـرة جزئية من $G$ وبما أن $\frac{G}{F}=\langle F.x:x\in S\rangle$ نجد أن $\frac{G}{F}=HF$ وحسـب المبرهنـة (١٣-١-٧) نجد أن $G=H=\langle S\rangle$ ₒ.

**مبرهنـة ١٣-١-٩.**

لـتكن $G$ زمـرة و $H$ زمـرة جزئيـة ناظميـة فـي $G$ و $K$ زمـرة جزئيـة تحقق $H\subseteq Fr(K)$. إذا كانت الزمرة $Fr(K)$ منتهية التوليد فإن $H\subseteq Fr(G)$.

البرهـان.

لنفرض جدلاً أن $H\not\subset Fr(G)$ عندئذ توجد زمـرة جزئيـة أعظميـة $M$ فـي $G$ بحيث $H\not\subset M$ عندئذ $K\not\subset M$، لأنه إذا كان $K\subseteq M$ فإن

$$H\subseteq Fr(G)\subseteq K\subseteq M$$

وهذا غير ممكن. وبما أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$ يكون الجداء $HM$ زمرة جزئيـة من $G$ وأن $M\subset HM$ ولكون الزمرة $M$ أعظمية في $G$ نجد أن $G=HM$.

من جهة أخرى، وبما أن $H\subseteq K$ وحسب التمهيدية (٥-١-٦) فإن

$$H(K\cap M)=HK\cap HM=K\cap G=K$$



كذلك بما أن $H\subset Fr(G)\subset K$ فإن $K=Fr(G).(K\cap M)$ وذلك حسب التمهيدية (٥-١-٦). وحسب المبرهنـة (١٣-١-٧) نجـد أن $K=K\cap M$ أي أن $K\subseteq M$ وهذا غير مقبول فرضا، مما سبق نجد أن $H\subseteq Fr(G)$ ₒ.

**مبرهنـة ١٣-١-١٠.**

لتكن $G$ زمرة و $H$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ إذا كانت الزمرة $Fr(H)$ منتهيـة التوليد عندئذ $Fr(H)\subseteq Fr(G)$.

البرهـان.

لدينا حسب التمهيدية (١٣-١-٤) الزمرة $Fr(H)$ هي زمرة جزئية متميزة في $H$ وبما أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$ وأن $Fr(H)\subseteq H$ وحسب المبرهنـة (٧-٧) فـإن الزمرة $Fr(H)$ تكون ناظميـة فـي $G$. وحسـب المبرهنـة (١٣-١-٩) وبمـا أن الزمرة $Fr(H)$ منتهية التوليد نجد أن $Fr(H)\subseteq Fr(G)$ ₒ.

**تمهيديـة ١٣-١-١١.**

ليكن $f:G\to G'$ تشاكلاً زمرياً و $g\in G$. عندئذ:

١ – إذا كان العنصر $g$ ليس مولداً للزمرة $G$ فـإن العنصـر $f(g)$ لـيس مولـداً للزمرة $f(G)$.

٢ – $f(Fr(G))\subseteq Fr(f(G))$.

البرهـان.

١ – لنفرض أن العنصر $g$ ليس مولداً للزمرة $G$ ولتكن $S$ مجموعة جزئية وغير خالية من الزمرة $f(G)$ بحيث $f(G)=\langle S,f(g)\rangle$ عندئذ توجد مجموعـة جزئيـة $S_0\subseteq G$ وغير خالية بحيث $f(S_0)=S$ وتحقق أن $G=\langle S_0,g\rangle=\langle S_0\rangle$ وذلك لأن العنصر $g$ ليس مولداً للزمرة $G$ ومنه فإن $f(G)=\langle f(S_0)\rangle=\langle S\rangle$. مما سبق نجـد أن العنصر $f(g)$ ليس مولداً للزمرة $f(G)$.

٢ – ليكن $g\in Fr(G)$ عندئذ يكون العنصر $g$ ليس مولداً للزمـرة $G$ وحسـب (١) يكون العنصر $f(g)$ ليس مولداً للزمرة $f(G)$ أي أن $f(g)\in Fr(f(G))$ وهذا يبين

لنا أن $f(Fr(G)) \subseteq Fr(f(G))$ ∘

المبرهنة التالية تبين لنا أنه توجد علاقة هامة جداً بين الزمر الجزئية لزمرة فراتيني وزمرة فراتيني لزمرة التماثلات لتلك الزمر الجزئية.

**مبرهنة ١٣-١-١٢.**

لتكن $G$ زمرة منتهية. عندئذ:

١ – إذا كانت $H$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ بحيث $H \subseteq Fr(G)$ فإن

$$Inn(H) \subseteq Fr(Aut(H))$$

٢ – إذا كانت $H = Fr(G)$ فإن $Inn(H) \subseteq Fr(Aut(H))$.

**البرهان.**

١ – لنعرف العلاقة $\Theta : G \to Aut(H)$ بالشكل $\Theta(g) = T_g$ وذلك أياً كان $g \in G$ وحيث أن $T_g : H \to H$ معرف بالشكل

$$\forall h \in H \qquad T_g(h) = ghg^{-1}$$

وبما أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$ فإن $T_g(g) \in H$ وحسب المبرهنة (٧-٢) نجد أن $T_g$ هو تماثل للزمرة $H$. كما أن

$$\Theta(g_1 g_2) = T_{g_1 g_2} = \Theta(g_1) \circ \Theta(g_2)$$

وذلك أياً كان $g_1, g_2 \in G$ ومنه نجد أن $\Theta$ هو تشاكل زمري، كما أن $\Theta(H) = Inn(G)$. وبما أن $H \subseteq Fr(G)$ عندئذ $\Theta(H) \subseteq \Theta(Fr(G))$ وحسب التمهيدية (١٣-١-١١) فإن $\Theta(Fr(G)) \subseteq Fr(\Theta(G))$ وهكذا نجد أن

$$Inn(H) = \Theta(H) \subseteq \Theta(Fr(G)) \subseteq Fr(\Theta(G))$$

وبما أن الزمرة $G$ منتهية فإن الزمرة $Fr(\Theta(G))$ تكون منتهية التوليد وحسب المبرهنة (١٣-١-٩) نجد أن $Inn(H) \subseteq Fr(Aut(H))$.

٢ – لنفرض أن $H = Fr(G)$ وحسب التمهيدية (١٣-١-٤) فإن الزمرة $H$ تكون ناظمية في $G$ وحسب (١) نجد أن $Inn(H) \subseteq Fr(Aut(H))$ ∘

**تمهيدية ١٣-١-١٣.**

لتكن $G$ زمرة منتهية و $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. الشرط اللازم والكافي كي يكون $K \subseteq Fr(G)$ هو أن لا توجد في $G$ زمرة جزئية $H \neq G$ تحقق $G = H.K$.

**البرهان.**

لزوم الشرط. لنفرض أن $K \subseteq Fr(G)$. ولتكن $H \neq G$ زمرة جزئية ناظمية من $G$ وبما أن الزمرة $G$ منتهية فإنه توجد زمرة جزئية أعظمية $M$ بحيث $H \subseteq M$. وبما أن $K \subseteq Fr(G)$ فإن $K \subseteq M$ ولكون الزمرة $K$ ناظمية في $G$ فإن $K$ تكون ناظمية في $M$ ومنه فإن $HK$ هو زمرة جزئية في $M$ وأن $HK \subseteq M \subset G$. وهذا يبين لنا أنه لا توجد في $G$ زمر جزئية $H \neq G$ بحيث $G = H.K$.

كفاية الشرط. لنفرض جدلاً أن $K \not\subset Fr(G)$ عندئذ $G \neq E$ ومنه توجد في الزمرة $G$ زمرة جزئية أعظمية $M$ بحيث $K \not\subset M$ وبما أن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ فإن $MK$ زمرة جزئية في $G$ وأن $M \not\subset MK$ ولكون الزمرة $M$ أعظمية في $G$ فإن $G = MK$ وهذا يناقض الفرض، مما سبق نجد أن $K \subseteq Fr(G)$ ∘

سوف ندرس الآن خواص الزمرة $Fr(G)$ من أجل الزمر المنتهية $G$ والبداية هي متى تكون الزمرة المنتهية عديمة القوى.

**مبرهنة ١٣-١-١٤.**

لتكن $G$ زمرة منتهية. الشروط التالية متكافئة:

١ – الزمرة $G$ عديمة القوى.

٢ – كل زمرة جزئية $H \subset G$ تحقق $H \subset N(H)$.

٣ – كل زمرة جزئية أعظمية في $G$ تكون ناظمية في $G$.

٤ – $G' \subseteq Fr(G)$.

٥ – كل $p$ – زمرة جزئية سيلوفية من $G$ تكون ناظمية في $G$.

٦ – $G$ عبارة عن مجموع مباشر منته لزمر مراتبها قوة لعدد أولي.

البرهــان.

(١)⇐(٢). ينتج من المبرهنة (١٢-٢-٤).

(٢)⇐(٣). لــتكن $M$ زمــرة جزئيــة أعظميــة فــي $G$، عندئــذ حســب الفرض $M \subset N(M)$ ولكون الزمرة $M$ أعظمية ينتج $M = N(M)$ وبالتالي تكون الزمرة $M$ ناظمية في $G$.

(٣)⇔(٤). ينتج من المبرهنة (١٣-١-٦).

(٣)⇐(٥). لتكن $K$ عبارة عن $p$ – زمرة جزئية سـيلوفية فـي $G$ ولنفـرض أن $N(K) \neq G$ وبما أن الزمرة $G$ منتهية، فإنه توجد في $G$ زمرة جزئية أعظميـة $M$ بحيث $N(K) \subseteq M$ وحسب المبرهنة (١٠-١٧) نجد أن $N(M) = M \neq G$ وهـذا يبين لنا أن الزمرة $M$ ليست ناظمية في $G$.

(٥)⇐(٦). لتكن $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_s$ هي جميع الأعداد الأولية المختلفة والتي كـل منها يقسم مرتبة الزمرة $G$. عندئذ

$$(G:1) = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\cdots p_s^{\alpha_s}$$

حيث $1 \leq i \leq s, \alpha_i \in N^*$. وحسب مبرهنة سيلوف الأولى يوجد فـي $G$ $P_i$–زمـرة جزئية سيلوفية $H_i$ مرتبتها $P_i^{\alpha_i}$ لأجل كل $1 \leq i \leq s$. وحسب الفرض فـإن الزمـر الجزئيـة $H_i$ ناظميـة فـي $G$ لأجـل كـل $1 \leq i \leq s$. لنبـرهن علـى أن $G = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_s$.

لنفرض أن $M = H_1.H_2.\cdots.H_s$ وواضح أن $M$ هي زمرة جزئية ناظميـة فـي $G$.

لنبرهن بالاستقراء حسب $s$ أن $(M:1) = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\cdots p_s^{\alpha_s}$.

– من أجل $s = 1$ عندئذ $M = H_1$ ومنه $(M:1) = p_1^{\alpha_1}$.

لنفرض أن الفرضية صحيحة من أجـل $s-1$ ولنفـرض أن $N = H_1.H_2.\cdots.H_{s-1}$ وأن $(N:1) = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\cdots p_{s-1}^{\alpha_{s-1}}$ عندئذ $N \cap H_s = E$ كما أن

$$(M:1) = \frac{(N:1)(H_s:1)}{(N \cap H_s:1)} = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\cdots p_s^{\alpha_s}$$

وبما أن $(M:1) = (G:1)$ نجد أن $M = G$ وبالتالي تكون



$$G = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_s$$

(٦)⇐(١). لنفرض أن $G = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ حيث $H_i$ زمر جزئيـة ناظميـة في $G$ وأن $(H_i:1) = p_i^{\alpha_i}, 1 \leq i \leq n$. وبما أن الزمر $H_i$ منتهية ومراتبها قوة لعدد أولي فإنه حسب المبرهنة (١٢-٢-٦) تكون الزمر $H_i$ عديمة القوى $1 \leq i \leq s$. وبما أن

$$G = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \approx H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$$

فإنه حسب المبرهنة (١٢-٢-٧) تكون الزمرة $G$ عديمة القوى. ₀

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة نحصل الحقيقة الهامة التالية:

**مبرهنـة ١٣-١-١٥.**

إذا كانت الزمرة $G$ منتهية فإن الزمرة $Fr(G)$ تكون عديمة القوى.

**البرهــان.**

لتكن $K$ عبارة عن $p$–زمرة جزئية سـيلوفية فـي $Fr(G)$، وبمـا أن الزمـرة $Fr(G)$ ناظمية في $G$ وأن الزمرة $Fr(G)$ منتهية وحسب التمهيديـة (١٠-٦) نجـد أن $G = N(K).Fr(G)$. وحسب التمهيدية (١٣-١-١٣) فإن $N(K) = G$ ومنه نجد أن الزمرة $K$ ناظمية في $G$، وبما أن $K \subset Fr(G)$ فإن الزمرة $K$ تكون ناظميـة في $Fr(G)$ وحسب المبرهنة (١٣-١-١٥) نجد أن الزمرة $Fr(G)$ عديمة القوى. ₀

**مبرهنـة ١٣-١-١٦.**

لتكن $G$ زمرة منتهية و $K, H$ زمر جزئية في $G$. إذا كانت الزمرة $K$ ناظميـة في $G$ عندئذ:

١ – إذا كانت $K \subseteq Fr(H)$ فإن $K \subseteq Fr(G)$.

٢ – $Fr(K) \subseteq Fr(G)$.

٣ – $\frac{Fr(G).K}{K} \subseteq Fr(\frac{G}{K})$.

٤ – إذا كان $K \subseteq Fr(G)$ فإن $\frac{FrG)}{K} = Fr(\frac{G}{K})$.

البرهان.

١ – لنفرض أن $K \subseteq Fr(H)$ وأن $K \not\subset Fr(G)$ عندئذ حسب المبرهنة (١٣-١-١٣) فإنه توجد زمرة جزئية $M$ في $G$ بحيث $G = MK$ وبما أن $K \subseteq Fr(H)$ نجد أن

$$K \subseteq H \subseteq G = MK$$

وبالتالي $H = (H \cap M)K$ ومنه $H = H \cap M$ وبالتالي يكون $K \subseteq H \subseteq M$. بهذا الشكل نجد أن $G = MK = M \subset G$ أي أن $G \neq G$ وهذا غير ممكن، مما سبق نجد أن $K \subseteq Fr(G)$.

٢ – بما أن الزمرة $Fr(K)$ متميزة في $K$ وأن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ فإنه حسب المبرهنة (٧-٧) تكون الزمرة $Fr(K)$ ناظمية في $G$ وحسب (١) بما أن $Fr(K) \subseteq K$ نجد أن $Fr(K) \subseteq Fr(G)$.

٣ – لتكن $\overline{M}$ زمرة جزئية أعظمية في $\frac{G}{K}$ عندئذ $\overline{M} = \frac{M}{K}$ حيث $M$ زمرة جزئية من $G$ تحوي $K$ وبما أن الزمرة $\frac{M}{K}$ أعظمية في $\frac{G}{K}$ وحسب المبرهنة (١٣-١-٣) فإن الزمرة $M$ تكون أعظمية في $G$ ومنه $Fr(G).K \subseteq MK \subset M$ وبالتالي

$$\frac{Fr(G).K}{K} \subseteq \frac{MK}{K} \subseteq \frac{M}{K} = \overline{M}$$

وذلك من أجل أي زمرة جزئية أعظمية $\overline{M}$ من $\frac{G}{K}$. مما سبق نجد أن $\frac{Fr(G).K}{K} \subseteq Fr(\frac{G}{K})$.

٤ – بما أن $K \subseteq Fr(G)$ فإنه حسب (٣)

$$\frac{Fr(G)}{K} = \frac{Fr(G).K}{K} \subseteq Fr(\frac{G}{K})$$

وبما أن كل زمرة جزئية أعظمية في الزمرة $\frac{G}{K}$ هي من الشكل $\frac{M}{K}$ حيث $M$ زمرة جزئية أعظمية في $G$، نجد أن $\frac{FrG)}{K} = Fr(\frac{G}{K})$. ∘

مبرهنة ١٣-١-١٧.

لتكن $A,B$ زمراً جزئية ناظمية من الزمرة $G$ بحيث $G = A \times B$ عندئذ:

١ – إذا كانت $H$ زمرة جزئية ناظمية من $G$ بحيث $A \subset H \subset G$ فإن

$$H = A \times (B \cap H)$$

٢ – $Fr(G) \subseteq Fr(A) \times Fr(B)$.

البرهان.

١ – بما أن الزمرة $A$ ناظمية في $G$ فإن $A$ ناظمية في $H$. من جهة أخرى الزمرة $B \cap H$ ناظمية في $H$ لأنه إذا أياً كان $h \in H$ فإن

$$h(B \cap H)h^{-1} \subseteq B \cap H$$

ليكن $y \in h(B \cap H)h^{-1}$ عندئذ يوجد $b \in B \cap H$ بحيث $y = hbh^{-1} \in B$ وذلك لأن الزمرة $B$ ناظمية في $G$. وبما أن $b,h \in H$ فإن $y = hbh^{-1} \in H$ ومنه $y \in B \cap H$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $B \cap H$ ناظمية في $H$. كما أن

$$A \cap (B \cap H) = (A \cap B) \cap H = E \cap H = E$$

كذلك الجداء $A(B \cap H)$ هو زمرة جزئية من $H$ أي أن $A(B \cap H) \subseteq H$. ليكن $h \in H$ عندئذ $h \in G$ ومنه $h = ab$ حيث $a \in A, b \in B$ وبالتالي $a^{-1}h = b$ ومنه $b = a^{-1}h \in AH \subseteq H$ وهكذا نجد أن $b \in B \cap H$. كما أن $h = ab \in A(B \cap H)$ أي أن $H \subseteq A(B \cap H)$ وبالتالي $H = A(B \cap H)$. مما سبق نجد أن $H = A \times (B \cap H)$.

٢ – لتكن $M$ زمرة جزئية أعظمية في $A$ عندئذ تكون الزمرة $MB$ زمرة جزئية أعظمية في $G$ لأنه إذا كانت $K$ زمرة جزئية من $G$ تحقق $MB \subseteq K \subset G$ فإن $K = MB(B \cap K) \subseteq (MB)B \subseteq MB$ ومنه نجد أن $MB = K$. أي أن الزمرة $MB$ أعظمية في $G$ ومنه $Fr(G) \subseteq MB$ وبما أن $M \cap B \subset A \cap B = E$ فإن $Fr(G) \subseteq M \times B$. لنفرض أن $\Im = \{M_\alpha : \alpha \in I\}$ مجموعة الزمر الجزئية الأعظمية في $A$ وبما أن $Fr(G) \subseteq MB$ فإن

$$Fr(G) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I}(M_\alpha B) \subseteq (\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha)B = Fr(A).B = Fr(A)\times B$$

بشكل مشابه نجد $Fr(G) \subseteq A\times Fr(B)$ مما سبق نجد أن

$Fr(G)\subseteq Fr(A)\times Fr(B)$ . ₀

## ١٣-٢. الزمر الجزئية الأصغرية وزمرة *Fitting* .

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة و $\Im$ مجموعة الزمر الجزئية الناظمية في $G$ والتي كل منها لا يساوي $E$. نقول عن الزمرة الجزئية $H\in\Im$ إنها أصغرية في $G$ إذا كانت $H$ عنصراً أصغرياً في $\Im$.

بعض الشروط المكافئة لمفهوم الزمر الجزئية الأصغرية نوردها من خلال التمهيدية التالي:

**تمهيدية ١٣-٢-١.**

لتكن $G$ زمرة و $H \neq E$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. الشروط التالية متكافئة:

١ – الزمرة الجزئية $H$ أصغرية في $G$.

٢ – من أجل أي زمرة جزئية ناظمية $D$ من $G$ تحقق $D \subset H$ فإن $H = E$.

٣ – لا توجد في $G$ زمر جزئية ناظمية $B$ تحقق $E \neq B \subset H$.

٤ – من أجل أي زمرة جزئية ناظمية $K$ من $G$ تحقق $E \neq K \subseteq H$ فإن $K = H$.

**البرهان.**

لتكن $\Im$ مجموعة الزمر الجزئية الناظمية في $G$ والتي كل منها لا يساوي $E$.

(١)⇐(٢). لنفرض أن الزمرة الجزئية الناظمية $H$ أصغرية في $G$ ولتكن $D$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ تحقق $D \subset H$. لنفرض أن $E \neq D$ عندئذ $D \in \Im$ وهذا يناقض كون $H$ عنصر أصغري في $\Im$ ومنه $H = E$.

(٢)⇐(٣). لنفرض جدلاً أنه توجد في $G$ زمرة جزئية ناظمية $B$ تحقق $E \neq B \subset H$ وحسب (٢) فإن $B = E$ وهذا غير ممكن. وبالتالي لا توجد في $G$



زمرة جزئية ناظمية $B$ تحقق $E \neq B \subset H$ .

(٣)⇐(٤). لتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ تحقق $E \neq K \subseteq H$ وحسب (٣) فإن $K = H$ لأنه لا توجد في $G$ زمر جزئية ناظمية $K$ تحقق $E \neq K \subset H$.

(٤)⇐(١). لتكن $F$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ بحيث $F \neq E$ وأن $F \subseteq H$. إذا كان $H \neq F$ نحصل على تناقض مع الفرض ومنه $H = F$، أي أن الزمرة $H$ أصغرية في $G$. ₀

**تمهيدية ١٣-٢-٢.**

لتكن $G$ زمرة و $H \neq K$ زمر جزئية ناظمية أصغرية في $G$. عندئذ

$$H.K = H \times K$$

**البرهان.**

بما أن الزمر الجزئية $H,K$ ناظمية في $G$ فإن الجداء $H.K$ زمرة جزئية في $G$ وأن $H \cap K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. إن $H \cap K \subset H$ لأنه إذا كان $H \cap K = H$ نجد أن $H \subseteq K$ ولكون الزمرة $K$ أصغرية في $G$ فإن $H = K$ وهذا مخالف للفرض، ومنه $H \cap K = E$ وهذا يبين لنا أن $H.K = H \times K$. ₀

**تمهيدية ١٣-٢-٣.**

لتكن $G$ زمرة و $H \neq G$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ و $K$ زمرة جزئية ناظمية أصغرية و تبديلية في $G$ وأن $G = H.K$. عندئذ:

١ – الزمرة $H$ أعظمية في $G$.

٢ – $K \cap H = E$.

٣ – إذا كانت الزمرة $K \subseteq Z(G)$ فإن الزمرة $H$ تكون ناظمية في $G$ وأن $G = H \times K$.

**البرهان.**

١ – لنفرض أن $H \neq G$. لتكن $M$ زمرة جزئية من $G$ بحيث $H \subseteq M$، لنبرهن على أن $M = H.(K \cap M)$. واضح أن $H.(K \cap M) \subseteq M$، ليكن $x \in M$ عندئذ

$x \in G = H.K$ ومنه $x = hk$ حيث $h \in H, k \in K$ وبما أن $h \in H \subseteq M$ فإن $h^{-1}x = k \in M, K$ ومنه $h^{-1}x \in M \cap K$ وبالتالي $x \in H.(K \cap M)$. وهكذا نجد أن $M \subseteq H.(K \cap M)$ أي أن $M = H.(K \cap M)$.

لنبرهن على أن الزمرة الجزئية $K \cap M$ ناظمية في $G$. ليكن $g \in G$ ولنبرهن على أن $g(K \cap M)g^{-1} \subseteq K \cap M$. ليكن $x \in g(K \cap M)g^{-1}$ عندئذ يوجد $y \in K \cap M$ بحيث $x = gyg^{-1}$ وبما أن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ وأن $y \in K$ نجد أن $x = gyg^{-1} \in K$. من جهة أخرى، لدينا $g \in G = H.K$ ومنه $g = h_1k_1$ حيث $h_1 \in H$ $k_1 \in K$ ومنه $x = h_1k_1gyg^{-1}k_1^{-1}h_1^{-1} = h_1yh_1^{-1}$ لأن $k_1, y \in K$ وأن الزمرة $K$ تبديلية. وبما أن $h \in H \subseteq M$ وأن $y \in M$ فإن $x = gyg^{-1} \in M$ وبالتالي $x \in K \cap M$. أي أن الزمرة الجزئية $K \cap M$ ناظمية في $G$ وبالتالي الجداء $H.(K \cap M)$ زمرة جزئية في $G$، وبما أن الزمرة $K$ ناظمية أصغرية في $G$ وأن $K \cap M \subseteq K$ عندئذ إما $K \cap M = K$ أو $K \cap M = E$. إذا كان $K \cap M = K$ نجد أن $K \subseteq M$ ومنه $G = H.K \subseteq M \subseteq G$ وبالتالي $M = G$. إذا كان $K \cap M = E$ نجد أن $M = H$. مما سبق نجد أن الزمرة $M$ أعظمية في $G$.

٢ – لنفرض أن $K \cap H \neq E$ عندئذ $K \cap H \subseteq K$. من جهة أخرى، الزمرة $K \cap H$ ناظمية في $G$، لأنه $\forall g \in G$ و $\forall x \in g(H \cap K)g^{-1}$ يوجد $y \in H \cap K$ بحيث $x = gyg^{-1}$ وبما أن $y \in K$ وأن $K$ ناظمية في $G$ فإن $x \in K$. من جهة أخرى، بما أن $g \in G = H.K$ فإن $g = h_2k_2$ حيث $h_2 \in H, k_2 \in K$ وبما أن الزمرة $K$ تبديلية فإن

$$x = hkyk^{-1}h^{-1} = hyh^{-1} \in H$$

ومنه $x \in H \cap K$ أي أن الزمرة $H \cap K$ ناظمية في $G$ وبما أن $H \cap K \subseteq K$ وأن الزمرة $K$ أصغرية فإنه إما $H \cap K = K$ أو $H \cap K = E$. وبما أن $H \cap K \neq E$ نجد أن $H \cap K = K$ أي أن $K \subseteq H$ ومنه $G = H.K \subseteq H \subseteq G$ وبالتالي $G = H$ وهذا غير ممكن فرضا ومنه $H \cap K = E$.

٣ – لنفرض أن $K \subseteq Z(G)$ عندئذ الزمرة $H$ ناظمية في $G$ لأنه $\forall g \in G$ و $\forall x \in gHg^{-1}$ يوجد $h \in H$ بحيث $x = ghg^{-1}$ وأن $g = h_3k_3$ حيث $h_3 \in H, k_3 \in K$ ومنه

$$g = h_3k_3hk_3^{-1}h_3^{-1} = h_3hh_3^{-1} = h \in H$$

أي أن الزمرة $H$ ناظمية في $G$ ومنه $G = H.K = H \times K$. ◦

**تعريف.**

لتكن $G \neq E$ زمرة منتهية. نرمز لجداء جميع الزمر الجزئية الناظمية الأصغرية في $G$ بالرمز $Soc(G)$ وتسمى ($sockel$[1] $of\ G$).

ينتج من التعريف مباشرة أن $Soc(G)$ زمرة جزئية في $G$.

**تمهيدية ١٣-٢-٤.**

لتكن $G \neq E$ زمرة. ولتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية أصغرية في $G$. عندئذ:

١ – $\forall f \in Aut(G)$ الزمرة الجزئية $f(K)$ ناظمية أصغرية في $G$.

٢ – الزمرة الجزئية $Soc(G)$ متميزة في $G$.

٣ – الزمرة الجزئية $Soc(G)$ ناظمية في $G$.

**البرهان.**

١ – ليكن $f \in Aut(G)$ عندئذ حسب المبرهنة (٦-١) فإن $f(K)$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. وبما أن $K \neq E$ فإن $f(K) \neq E$. لتكن $H$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ بحيث $H \subseteq f(K)$ عندئذ فإن $f^{-1}(H)$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ وأن $f^{-1}(H) \subseteq K$ وبما أن $K$ أصغرية في $G$ عندئذ إما $f^{-1}(H) = K$ أو $f^{-1}(H) = E$.

– إذا كان $f^{-1}(H) = E$ نجد أن $H = E$.

– إذا كان $f^{-1}(H) = K$ نجد أن $H = f(K)$.

مما سبق نجد أن الزمرة $f(K)$ أصغرية في $G$.

---

[1] كلمة ألمانية اصطلح على عدم ترجمتها.

٢ – لنفرض أن $Soc(G) = H_1.H_2.H_3.\cdots.H_n$ عندئذ أياً كان $f \in Aut(G)$ فإن

$$f(Soc(G)) = f(H_1.H_2.H_3.\cdots.H_n) =$$
$$= f(H_1).f(H_2).f(H_3).\cdots.f(H_n) \subseteq Soc(G)$$

وذلك حسب (١) وهذا يبين لنا أن الزمرة $Soc(G)$ متميزة في $G$.

٣ – ينتج من المبرهنة (٧-٧). ٥

**زمرة $Fitting$.**

إن الزمرة المولدة بزمرتين جزئيتين عديمتي القوى ليس بالضرورة أن تكون زمرة عديمة القوى حتى ولو كانت إحدى هذه الزمر ناظمية، لأجل ذلك سوف ندخل المفهوم التالي:

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة. نسمي الزمرة الجزئية الناظمية عديمة القوى الأعظمية في $G$ زمرة $Fitting$ ونرمز لها $Fit(G)$.

**مبرهنة ١٣-٢-٥.**

لتكن $G$ زمرة. عندئذ:

١ – الزمرة الجزئية $Fit(G)$ متميزة في $G$.

٢ – الزمرة الجزئية $Fit(G)$ ناظمية في $G$.

٣ – إذا كانت الزمرة $G$ منتهية فإنها تحوي الزمرة $Fit(G)$.

٤ – إذا كانت الزمرة $G$ منتهية فإن $Fr(G) \subseteq Fit(G)$.

**البرهان.**

١– ليكن $f \in Aut(G)$ ولنفرض أن $Fit(G) = F$ وأن $f(F) = K$ عندئذ $K$ زمرة جزئية ناظمية عديمة القوى في $G$ ومنه $f(F) \subseteq F$. أي أن الزمرة $Fit(G)$ متميزة في $G$.

٢ – ينتج من المبرهنة (٧-٧).



٣ – لنفرض أن الزمرة $G$ منتهية وأن $K$ الزمرة الجزئية الناظمية عديمة القوى في $G$ ذات المرتبة الأكبر. ولتكن $H$ زمرة جزئية ناظمية عديمة القوى في $G$ عندئذ حسب المبرهنة (١٢-٢-١٤) فإن الجداء $H.K$ زمرة جزئية ناظمية عديمة القوى في $G$. وبما أن $K \subseteq H.K$ وحسب اختيارنا للزمرة $K$ نجد أن $K = H.K$ وهذا يبين لنا أن $H \subseteq K$. مما سبق نجد أن الزمرة $K$ هي الزمرة الجزئية الناظمية الأعظمية عديمة القوى في $G$ أي أن $K = Fit(G)$.

٤ – لنفرض أن الزمرة $G$ منتهية عندئذ حسب المبرهنة (١٣-١-١٥) فإن الزمرة $Fr(G)$ عديمة القوى في $G$ وبما أنها ناظمية نجد أن $Fr(G) \subseteq Fit(G)$. ٥

**تمهيدية ١٣-٢-٦.**

لتكن $G$ زمرة منتهية عديمة القوى. عندئذ كل زمرة جزئية ناظمية أصغرية في $G$ تكون محتواة في $Z(G)$.

**البرهان.**

لتكن $L$ زمرة جزئية ناظمية أصغرية في $G$ عندئذ وحسب التمرين المحلول (١٢-٣) فإن $\langle [L,G] \rangle \subseteq L$ كذلك حسب التمرين (١٢-٦) الزمرة $\langle [L,G] \rangle$ ناظمية في $G$ وبما أن الزمرة $L$ أصغرية في $G$ فإنه إما $\langle [L,G] \rangle = E$ أو $\langle [L,G] \rangle = L$.

لنفرض أن $\langle [L,G] \rangle = L$ ولنبرهن بالاستقراء على أن $L \subseteq \Gamma_n(G)$ وذلك $\forall n \in N^*$. من أجل $n=1$ فإن $L \subseteq G = \Gamma_1(G)$. لنفرض أن القضية صحيحة من أجل $n-1>1$ عندئذ

$$L = \langle [L,G] \rangle \subseteq \langle [\Gamma_{n-1}(G),G] \rangle = \Gamma_n(G)$$

ومنه نجد أن $L \subseteq \Gamma_n(G)$ وذلك $\forall n \in N^*$. وبما أن الزمرة $G$ عديمة القوى وحسب المبرهنة (١٢-٢-١٠) يوجد $m \in N^*$ بحيث $\Gamma_m(G) = E$ مما سبق نجد أن $L \subseteq \Gamma_n(G) = E$ وهذا يناقض كون $L \neq E$. وهكذا نجد أن $\langle [L,G] \rangle = E$ والذي يبين لنا أن $L \subseteq Z(G)$. ٥

**مبرهنة ١٣-٢-٧.**

لتكن $G$ زمرة وأن $M$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. عندئذ

$$Fit(G) \subseteq C(M)$$

**البرهان.**

لنفرض أن $F = Fit(G)$ وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى. إذا كان $F \cap M = E$ عندئذ بما أن كلاً من الزمرتين $F, M$ ناظمية في $G$ فإن الجداء $F.M$ زمرة جزئية في $G$ ومنه $M.F = M \times F$ وبالتالي حسب التمهيدية (٨-٢-١) فإنه أياً كان $x \in F$ وأنه أياً كان $y \in M$ فإن $xy = yx$ ومنه $F \subseteq C(M)$.
- الحالة الثانية. إذا كان $F \cap M \neq E$ وبما أن الزمرة $F \cap M$ ناظمية في $G$ وأن $F \cap M \subseteq M$ وبما أن الزمرة $M$ أصغرية في $G$ نجد أن $F \cap M = M$ ومنه $M \subseteq F$ وبما أن الزمرة $F$ ناظمية في $G$ وأن الزمرة $Z(F)$ متميزة في $F$ فإنه حسب المبرهنة (٧-٧) فإن الزمرة $Z(F)$ ناظمية في $G$. ومنه فإن الزمرة $M \cap Z(F)$ ناظمية في $G$ وبما أن $M \cap Z(F) \neq E$ وذلك حسب التمهيدية (١٣-٢-٦) وأن الزمرة $M$ أصغرية في $G$ فإن $M \cap Z(F) = M$ ومنه $M \subseteq Z(F)$ وبالتالي $F \subseteq C(M)$. ₀

**مبرهنة ١٢-٢-٨.**

لتكن $G$ زمرة منتهية. عندئذ الزمرة $C(Fi(G))$ تحوي جميع الزمر الجزئية الناظمية الأصغرية في $G$.

**البرهان.**

لنفرض أن $K = Fi(G)$ وأن $H = C(Fit(G))$ ولتكن $L$ زمرة جزئية ناظمية أصغرية في $G$. سوف نميز حالتين:

- الحالة الأولى. لنفرض أن $L \not\subset K$ وبما أن $L \cap K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ كما أن $L \cap K \neq L$ لأنه إذا كان $L \cap K = L$ فإن $L \subseteq K$ وهذا مرفوض. وبما أن $L \cap K \subseteq L$ وأن الزمرة $L$ أصغرية نجد أن $L \cap K = E$. وحسب التمرين المحلول (١٢-١) فإن $\langle [K,L] \rangle \subseteq L \cap K = E$ أي أن $[L,K] = E$ ومنه $K = L$ وبالتالي $L \subseteq H$.
- الحالة الثانية. بفرض أن $L \subseteq K$ عندئذ فإن الزمرة الجزئية $L$ ناظمية في $K$ وأن $L \neq E$ وبما أن الزمرة $K$ منتهية فإنه توجد زمرة جزئية ناظمية في $K$ ولتكن $M$ بحيث $M \subseteq L$ وهكذا نجد أن $M \subseteq Z(K)$ وبالتالي $Z(K) \cap L \neq E$. وبما أن الزمرة $Z(K)$ ناظمية في $G$ فإن الزمرة $Z(K) \cap L$ ناظمية في $G$ ولكون الزمرة $L$ أصغرية في $G$ فإن $Z(K) \cap L = L$. مما سبق نجد أن $L \subseteq Z(K) \subseteq H$. ₀

## ١٣-٣. الزمر البسيطة.

**تعريف.**

نقول عن الزمرة $G$ إنها بسيطة إذا لم تحوي زمر جزئية ناظمية تختلف عن $G$ و $E$.

تعد الزمرة البسيطة من الزمر نادرة الوجود وليس من المفاجئ القول إنه بين الزمر غير التبديلية والتي مراتبها أقل من 168 توجد زمرة بسيطة واحدة فقط هي $A_5$. وبين الزمر غير التبديلية والتي مراتبها أقل من 1000 توجد 5 زمر بسيطة فقط. وبين الزمر غير التبديلية والتي مراتبها أقل من 1000000 توجد فقط 56 زمرة بسيطة فقط. وندرة هذا النوع من الزمر وصعوبة دراسته كان من الأسهل الإجابة عن السؤال التالي متى تكون الزمرة غير بسيطة، وقد تم إيجاد عدد من الاختبارات للزمر غير البسيطة وسوف نبدأ بالاختبار التالي:

**مبرهنة ١٣-٣-١.**

لتكن $G$ زمرة منتهية غير تبديلية. عندئذ تكون الزمرة $G$ غير بسيطة في كل من الحالات التالية:

١ – إذا كانت $(G:1) = p^n$ حيث $p$ عدد أولي.

٢ – إذا كانت $(G:1) = pq$ حيث $p,q$ أعداد أولية مختلفة.

**البرهـــان.**

١ – لنفرض أن $(G:1)=p^n$ عندئذ حسب المبرهنة (١٠–٥) فإن $Z(G)\neq E$ وأن $G\neq Z(G)$ لأن الزمرة $G$ ليست تبديلية، كما أن الزمرة $Z(G)$ ناظمية في $G$. ومنه نجد أن الزمرة $G$ ليست تبديلية.

٢ – لنفرض أن $(G:1)=pq$. بما أن الأعداد $p,q$ أولية مختلفة لنفرض أن $p>q$ وحسب المبرهنة (١٠–٩) فإن الزمرة $G$ تحوي $p$–زمرة جزئية سيلوفية ولتكن $K$ وأن عدد هذه الزمر حسب مبرهنة سيلوف الثالثة يساوي $1+kp$ حيث $k\in N$ ويقسم $p.q$ أي أن $1+kp\in\{1,p,q,pq\}$ وهنا نلاحظ أن هذا محقق فقط من أجل $k=0$ أي أنه توجد $p$–زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط في $G$ وحسب المبرهنة (١٠–١٥) فإن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ وأن $K\neq E$ كما أن $K\neq G$. مما سبق نجد أن الزمرة $G$ غير بسيطة. ₀

الاختبار التالي يبين لنا أنه لا توجد بين الزمر التبديلية وغير المنتهية زمر بسيطة.

**مبرهنة ١٣–٣–٢.**

كل زمرة بسيطة و تبديلية هي زمرة دوارة مرتبتها 1 أو عدد أولي.

**البرهـــان.**

لتكن $G$ زمرة بسيطة و تبديلية.

– إذا كانت $G=E$ يتم المطلوب. لنفرض أن $G\neq E$ عندئذ يوجد $g\in G$ بحيث $g\neq e$ ومنه $\langle g\rangle\neq E$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ ولكون الزمرة $G$ بسيطة فإن $G=\langle g\rangle$. لنفرض أن $o(g)=n$. عندئذ $n<\infty$ لأنه في الحالة المعاكسة فإن $\langle g^2\rangle$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ وأن $G\neq\langle g^2\rangle$ لأنه إذا كان $G=\langle g^2\rangle$ فإن $g\in\langle g^2\rangle$ وبالتالي يوجد $k\in Z$ بحيث $g=g^{2k}$، وهذا يناقض كون الزمرة دوارة وغير منتهية. مما سبق نجد أن $n<\infty$. ليكن $p$ عدداً أولياً يقسم $n$ عندئذ $G\neq\langle g^{n/p}\rangle$ ولكون الزمرة $G$ بسيطة فإن $\langle g^{n/p}\rangle=E$ ومنه نجد أن $(G:1)=n=p$. ₀



**مبرهنة ١٣–٣–٣.**

لتكن $G$ زمرة و $K\neq G$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. الشروط التالية متكافئة:

١ – الزمرة $K$ أعظمية في $G$.

٢ – الزمرة $\frac{G}{K}$ بسيطة.

**البرهـــان.**

(١)⇐(٢). لتكن $D$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ وحسب المبرهنة (٥–٢–٣) فإن $\overline{D}=\frac{H}{K}$ حيث $H$ زمرة جزئية من $G$ وأن $K\subseteq H$ وبما أن الزمرة الجزئية $K$ أعظمية في $G$ فإنه إما $H=G$ أو $H=K$ وبالتالي إما $\overline{D}=\frac{G}{K}$ أو $\overline{D}=K$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $\frac{G}{K}$ بسيطة.

(٢)⇐(١). لنفرض أن الزمرة $\frac{G}{K}$ بسيطة ولتكن $H$ زمرة جزئية من $G$ تحقق $K\subseteq H\subseteq G$ وبما أن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ فإن الزمرة $K$ تكون ناظمية في $H$ وبالتالي فإن $\frac{H}{K}$ زمرة جزئية من $\frac{G}{K}$. ولكون الزمرة $\frac{G}{K}$ بسيطة عندئذ إما $\frac{H}{K}=\frac{G}{K}$ أو $\frac{H}{K}=K$ وهذا يبين لنا أنه إما $H=G$ أو $H=K$. ومنه نجد أن الزمرة $K$ أعظمية في $G$. ₀

**مبرهنة ١٣–٣–٤.**

لتكن $G$ زمرة و $A,B$ زمر جزئية ناظمية أعظمية في $G$ بحيث $A\neq B$. عندئذ $A\cap B$ زمرة جزئية أعظمية في $A$ وأيضا في $B$.

**البرهـــان.**

بما أن كلاً من $A,B$ زمر جزئية ناظمية فإن الجداء $A.B$ هو زمرة جزئية ناظمية في $G$ وبما أن $A\subseteq A.B$ وأن الزمرة $A$ أعظمية عندئذ إما $A=AB$ أو $G=AB$.

إذا كان $A = AB$ عندئذ $B \subseteq AB = A$ وبما أن $A \neq B$ فـإن $A \not\subset B \not\subset G$ وهـذا يناقض كون الزمرة $A$ أعظمية. ومنه $G = AB$ وبالتالي

$$\frac{G}{B} = \frac{AB}{B} \approx \frac{A}{A \cap B}$$

وبما أن الزمرة $B$ أعظمية في $G$ فإنه حسب المبرهنة (١٣-٣-٣) فإن الزمـرة $\frac{G}{B}$ بسيطة وبالتالي فإن الزمرة $\frac{A}{A \cap B}$ بسيطة وأيضا حسب المبرهنة (١٣-٣-٣) تكون الزمرة $A \cap B$ ناظمية و أعظمية في $A$. بشكل مشابه نبـرهن أن الزمـرة $A \cap B$ ناظمية و أعظمية في $B$. ₀

**مبرهنـــة ١٢-٣-٥.**

ليكن $n$ عدداً صحيحاً موجباً غير أولي. إذا كان 1 هو القاسم الوحيد للعدد $n$ الذي يحقق $1 \equiv 1 \bmod - p$ فإنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها $n$.

**البرهـــان.**

لتكن $G$ زمرة مرتبتها $n$. وهنا نميز حالتين:

- $n = p^t$ حيث $t \in N^*$ عندئذ حسب المبرهنة (١٠-٥) فـإن $Z(G) \neq E$ وبمـا أن الزمرة $Z(G)$ ناظمية في $G$ فإن الزمرة $G$ غير بسيطة.
- $n \neq p^t$ وذلك $\forall t \in N^*$ عندئذ $n = \alpha p$ وأن $\alpha \neq p^s$ ومنـه فـإن الزمـرة $G$ تحوي $p$-زمرة جزئية سيلوفية ، وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة فإن عدد هذه الزمر يساوي $1+kp$ ويقسم $n$. وحسب الفرض فإن $1+kp = 1$ أي أن الزمرة $G$ تحـوي $p$-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط ولـتكن $K$. إن $K \neq G$ لأن $n \neq p^t$ وهـذه الزمرة ناظمية وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ ليست بسيطة. ₀

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة نجد أن الزمر غير البسيطة والتي مراتبهـا بـين $1-200$ هي

12,24,30,36,48,56,60,72,80,90,96,105,108,112,120,132,

144,150,160,168,180,192

**مبرهنـــة ١٢-٣-٦.**

لتكن $G$ زمرة منتهيـــة مرتبتهـــا $pq$ حيـــث $p,q$ أعـــداد أوليـــة مختلفـــة وأن $q \not\equiv 1 \bmod - p$ عندئذ الزمرة $G$ ليست بسيطة.

**البرهـــان.**

لنفرض أن $(G:1) = pq$ وحسب مبرهنـــة ســـيلوف الأولـــى، فـــإن الزمـــرة $G$ تحوي $p$-زمرة جزئية سيلوفية، وعدد هذه الزمر يساوي $1+kp$ ويقسم $pq$ وذلـــك حسب مبرهنة سيلوف الثالثة. أي أن $1+kp = \{1,p,q,pq\}$ وحسب الفرض نجـــد أن هذا محقق فقط عندما $k = 0$ أي أن الزمرة $G$ تحوي $p$-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط وحسب المبرهنة (١٠-١٥) فإن هذه الزمرة تكون ناظمية في $G$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ ليست بسيطة. ₀

**نتيجـــة.**

إذا كانت $G$ زمرة منتهية مرتبتها $pq$ حيث $p,q$ أعداد أوليـــة مختلفـــة عندئـــذ الزمرة $G$ ليست بسيطة.

**البرهـــان.**

بما أن $p \neq q$ لنفرض أن $p > q$ عندئذ $q-1$ لا يقسم $p$ وحسب المبرهنة (١٢-٣-٦) فإن الزمرة $G$ تحوي $p$-زمرة جزئيـــة ســـيلوفية ناظميـــة ولـــتكن $K$ وأن $E \neq K \neq G$ ومنه فإن الزمرة $G$ ليست بسيطة. ₀

**تمهيديـــة ١٢-٣-٧.**

لتكن $G$ زمرة منتهية بسيطة وغير تبديلية و $p$ عدداً أولياً يقسم مرتبة الزمرة $G$. عندئذ فإن عدد جميع الـــ $p$-زمر الجزئية السيلوفية في $G$ أكبر من الواحد.

**البرهـــان.**

بما أن $p$ يقسم مرتبة الزمرة $G$ فإن الزمرة $G$ تحوي $p$-زمرة جزئية سيلوفية واحدة على الأقل ولتكن $K$. وبما أن الزمرة $G$ بسيطة وغير تبديلية، فإنـــه حســـب المبرهنة (١٠-٥) أياً كان $n \in N^*$ فإن $(G:1) = p^n$ وحسب المبرهنة الأساسية فـــي

الحساب يوجد عدد أولي $p \neq q$ يقسم مرتبة الزمرة $G$. ومنه فإن $E \neq K \neq G$. إذا كانت الزمرة $K$ هي الـ $p$-زمرة الجزئية السيلوفية الوحيدة في $G$ فإن الزمرة $K$ تكون ناظمية في $G$ وهذا يناقض كون الزمرة $G$ بسيطة. مما سبق نجد أن عدد جميع الـ $p$-زمر الجزئية السياوفية في $G$ أكبر من الواحد. ◦

**مبرهنة ١٢-٣-٨.**

لتكن $G$ زمرة منتهية. إذا كانت $(G:1)=p^2q$ حيث $p,q$ أعداد أولية مختلفة، عندئذ الزمرة $G$ ليست بسيطة.

**البرهان.**

حسب مبرهنة سيلوف الأولى فإن الزمرة $G$ تحوي $p$-زمرة جزئية سيلوفية وأيضا تحوي $q$-زمرة جزئية سيلوفية. لنفرض أن $n_p, n_q$ عدد جميع الـ $p$-زمر الجزئية السيلوفية وعدد جميع الـ $q$-زمر الجزئية السيلوفية على الترتيب. وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة فإن $n_p, n_q \in \{1, p, q, p^2, pq, p^2q\}$. لنفرض أن $n_p > 1, n_q > 1$ عندئذ $n_p$ يقسم $q$ ومنه $n_p = q$ وبما أن $n_p = 1+kp$ نجد أن $q > p$. من جهة أخرى، إن $n_q$ يقسم $p^2$ ومنه إما $n_p = p^2$ أو $n_p = q$. وبما أن كل عنصر من $G$ مرتبته $q$ يولد زمرة جزئية مرتبتها $q$ والتي تشكل $q$-زمرة جزئية سيلوفية في $G$. وبما أن أي زمرتين جزئيتين مختلفتين مرتبة كل منهما $q$ يساوي $E$ نجد أن الزمرة $G$ تحوي $n_q(q-1)$ عنصراً مرتبته $q$.

إذا كان $n_p = p^2$ عندئذ فإن الزمرة $G$ تحوي $p^2q - p^2(q-1) = p^2$ عنصراً مرتبته لا تساوي $q$. لتكن $K$ عبارة عن $p$-زمرة جزئية سيلوفية في $G$. عندئذ فإن $K$ لا تحوي عناصر مرتبتها $q$ وبما أن $(K:1) = p^2$ نجد أن $K$ هي الـ $p$-زمرة الجزئية السيلوفية الوحيدة في $G$ وهذا يناقض كون $n_p > 1$. ومنه نجد أن $n_p = q$ أي أن $1+kq = p$ والذي يبين لنا أن $p > q$ وهذا يناقض كون $q > p$. مما سبق نجد أن الزمرة $G$ ليست بسيطة. ◦

**مبرهنة ١٢-٣-٩.**

لتكن $G$ زمرة منتهية. إذا كانت $(G:1) = pqr$ حيث $p,q,r$ أعداد أولية مختلفة، عندئذ الزمرة $G$ ليست بسيطة.

**البرهان.**

لنفرض أن $p > q > r$ ولنفرض جدلاً أن الزمرة $G$ بسيطة. ولنفرض أيضا أن

$n_p$ هو عدد جميع الـ $p$-زمر الجزئية السيلوفية في $G$.

$n_q$ هو عدد جميع الـ $q$-زمر الجزئية السيلوفية في $G$.

$n_r$ هو عدد جميع الـ $r$-زمر الجزئية السيلوفية في $G$.

وحسب التمهيدية (١٢-٣-٧) فإن $n_p > 1, n_q > 1, n_r > 1$ وبما أن تقاطع أي $p$-زمرتين جزئيتين سيلوفيتين مختلفتين من $G$ يساوي $E$ نجد أن الزمرة $G$ تحوي $n_p(p-1)$ عنصراً مرتبته $p$، وتحوي $n_q(q-1)$ عنصراً مرتبته $q$ وتحوي $n_r(r-1)$ عنصراً مرتبته $r$. ومنه نجد أن

$$(G:1) = pqr \geq 1 + n_p(p-1) + n_q(q-1) + n_r(r-1)$$

وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة نجد أن

- $n_p = 1+kp$ ويقسم $qr$ وبما أن $n_p > 1$ و $p > q, p > r$ نجد أن $n_p = qr$.
- $n_q = 1+kq$ ويقسم $pr$ وبما أن $q > r$ فإن $n_q \geq p$.
- $n_r \geq q$.

وهذا يبين لنا أن

$$pqr \geq 1 + qr(p-1) + p(q-1) + q(r-1)$$

ومنه $(p-1)(q-1) \leq 0$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن الزمرة $G$ ليست بسيطة. ◦

## ١٣ - ٤. العلاقات والمولدات.

في هذه الفقرة سنقدم طريقة مناسبة لتعريف زمرة باستخدام ميزات خاصة بها. ببساطة سنبدأ بمجموعة من العناصر والعلاقات التي نريد من خلالها توليد زمرة، ومن بين كل الزمر الممكنة سنختار أكبر واحدة من هذه الزمر.

**تعاريف ومصطلحات.**

لتكن $S=\{a,b,c,\cdots\}$ مجموعة من الرموز المختلفة ولنعرف مجموعة جديدة $S^{-1}=\{a^{-1},b^{-1},c^{-1},\cdots\}$ وذلك باستبدال كل عنصر $x$ من $S$ بعنصر جديد هو $x^{-1}$. ولنعرف المجموعة $W(S)$ المؤلفة من جميع العلاقات المنتهية $x_1x_2x_3\cdots x_n$ حيث $x_i\in S\cup S^{-1}$ لأجل كل دليل $i$. عناصر المجموعة $W(S)$ سندعوها كلمات من $S$ وسنعتبر أن العلاقة التي لا تحوي أي عنصر من $S$ أو $S^{-1}$ هي كلمة من $W(S)$ وسندعوها الكلمة الخالية ونرمز لها بالرمز $e$. لنعرف على المجموعة $W(S)$ علاقة ثنائية (قانون تشكيل داخلي) بالشكل أياً كان $x_1x_2x_3\cdots x_t, y_1y_2y_3\cdots y_s\in W(S)$ فإن

$$x_1x_2x_3\cdots x_ty_1y_2y_3\cdots y_s\in W(S)$$

واضح أن هذه العملية تجميعية وأن الكلمة الخالية في $W(S)$ هي عنصر حيادي.
من الملاحظ أن الكلمة $aa^{-1}$ ليست هي العنصر الحيادي، لأنه حسب تعريف عناصر المجموعة $W(S)$ فإن هذه العناصر هي صف لرموز من $S$ و $S^{-1}$ بجانب بعضها بعضاً ولا تعني أي شيء آخر. إلى هنا نجد أنه كي تكون المجموعة $W(S)$ زمرة هو أن يوجد لكل عنصر من $W(S)$ مقلوب. وهنا تبرز الصعوبة لأنه منطقيا يجب أن يكون مقلوب الكلمة $ab$ هو الكلمة $b^{-1}a^{-1}$ ولكن حسب تعريفنا للعملية على $W(S)$ فإن الكلمة $abb^{-1}a^{-1}$ هي ليست الكلمة الخالية. لنورد الآن الطريقة التي تضمن لنا وجود مقلوب لعناصر المجموعة $W(S)$ وهذه الطريقة تبدأ من خلال تعريف علاقة تكافؤ على المجموعة $W(S)$.



**تعريف.**

من أجل أي عنصرين $u,v\in W(S)$ سوف نقول إن العنصر $u$ مرتبط بالعنصر $v$ إذا كان بالامكان الحصول على العنصر $v$ من العنصر $u$ عن طريق إجراء عدد منته من الاختصارات من الشكل $xx^{-1}$ أو $x^{-1}x$ حيث $x\in S$.

**تمهيدية ١٣-٤-١.**

إن علاقة الارتباط على عناصر المجموعة $W(S)$ الواردة في التعريف السابق هي علاقة تكافؤ على المجموعة $W(S)$.

**البرهان.**

سنتركه تمريناً للقارئ. ∘

**مثال.**

لنأخذ المجموعة $S=\{a,b,c\}$. إن العنصر $acc^{-1}b$ مكافئ للعنصر $ab$. والعنصر $aab^{-1}bbaccc^{-1}$ مكافئ للعنصر $aabac$. كذلك فإن الكلمة $a^{-1}aabb^{-1}a^{-1}$ تكافئ الكلمة الخالية. وكذلك الكلمة $ca^{-1}b$ مكافئة للكلمة $cc^{-1}caa^{-1}a^{-1}bbca^{-1}ac^{-1}b^{-1}$. بينما الكلمة $cac^{-1}b$ لا تكافئ الكلمة $ab$.

**مبرهنة ١٣-٤-٢.**

لتكن $S$ مجموعة و $u\in W(S)$. لنرمز لصف التكافؤ المولد بالكلمة $u$ بالرمز $\overline{u}$. عندئذ مجموعة كل صفوف التكافؤ لعناصر المجموعة $W(S)$ تشكل زمرة بالنسبة إلى العملية $\overline{u}.\overline{v}=\overline{uv}$ وذلك أياً كان $u,v\in W(S)$.

**البرهان.**

لنفرض أن

$$G=\{\overline{u}:u\in W(S)\}$$

مجموعة صفوف التكافؤ ولنبرهن على المجموعة $G$ زمرة. واضح من التعريف أن العملية $\overline{u}.\overline{v}=\overline{uv}$ داخلية على $G$ وذلك أياً كان $\overline{u},\overline{v}\in G$. لنبرهن على أن هذه العملية معرفة جيداً. ليكن $\overline{u},\overline{u}_1,\overline{v},\overline{v}_1\in G$ بحيث $\overline{u}=\overline{u}_1,\overline{v}=\overline{v}_1$ ولنبرهن على أن

. $\overline{uv}=\overline{u_1v_1}$

بما أن $\overline{u}=\overline{u_1}$ فإن الكلمتين $u,u_1$ متكافئتان ومنه تكون الكلمتان $u,v$ و $u_1,v$ متكافئتين ومنه $\overline{uv}=\overline{u_1v}$. كذلك بما أن $\overline{v}=\overline{v_1}$ فإن الكلمتين $u_1v,u_1v_1$ متكافئتان وبالتالي $\overline{u_1v}=\overline{u_1v_1}$. مما سبق نجد أن $\overline{u}.\overline{v}=\overline{uv}$.

كما أن العملية (.) تجميعية لأنه أياً كان $\overline{u},\overline{v},\overline{w}\in G$ فإن

$$(\overline{u}.\overline{v}).\overline{w}=\overline{(uv)}\overline{w}=\overline{(uv)w}=\overline{u(vw)}=\overline{u}\,\overline{(vw)}=\overline{u}(\overline{v}\overline{w})$$

وأن صف التكافؤ المولد بالكلمة الخالية هو حيادي بالنسبة إلى هذه العملية ولنرمز له $e$. كما أنه يوجد لكل عنصر من $G$ مقلوب لأنه إذا كان $\overline{u}\in G$ حيث $u\in W(S)$ ولنفرض أن $u=x_1x_2x_3\cdots x_n$ عندئذ

$$v=x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}\cdots x_n^{-1}\in W(S)$$

ويحقق أن $uv=e$ هو الكلمة الخالية ومنه $\overline{u}.\overline{v}=e$. مما سبق نجد أن $G$ زمرة. ◦

**تعريف.**

نسمي الزمرة المعرفة في المبرهنة السابقة بالزمرة الحرة على $S$.

**مبرهنة ١٣-٤-٣.**

كل زمرة هي صورة مباشرة لزمرة حرة وفق تشاكل زمري غامر.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة و $S$ مجموعة مولدات الزمرة $G$. (المجموعة $S$ دوماً موجودة لأنه بالإمكان أخذ $G$ بمثابة $S$). ولتكن $F$ الزمرة الحرة على (مجموعة مولداتها $S$). وبما أن كل كلمة من $W(S)$ هي عبارة عن جداء منته لعناصر من $G$ (عنصر من $G$) ولأجل ذلك سوف ندخل الرموز التالية:

سنرمز للكلمة $x_1x_2x_3\cdots x_n$ في $W(S)$ بالرمز $(x_1x_2x_3\cdots x_n)_F$ وللجداء $x_1x_2x_3\cdots x_n$ في $G$ بالرمز $(x_1x_2x_3\cdots x_n)_G$. بناءاً على ذلك فإن العنصر $\overline{x_1x_2x_3\cdots x_n}$ يرمز إلى صف التكافؤ في $F$ الممثل بالكلمة $(x_1x_2x_3\cdots x_n)_F$.

نلاحظ أن كلاً من $(x_1x_2x_3\cdots x_n)_G$ و $(x_1x_2x_3\cdots x_n)_F$ يمكن أن يكونا عنصرين



مختلفين، لأن العمليات في $W(S)$ و $G$ مختلفة. لنعرف العلاقة $\Phi:F\to G$ بالشكل التالي

$$\Phi(\overline{(x_1x_2x_3\cdots x_n)_F})=(x_1x_2x_3\cdots x_n)_G$$

واضح أن $\Phi$ تطبيق لأن الاختصارات من الشكل $xx^{-1}$ أو $x^{-1}x$ لعناصر $W(S)$ توافق ذات الاختصارات في $G$. وأن

$$\Phi[\overline{(x_1x_2x_3\cdots x_n)_F}.\overline{(x_1x_2x_3\cdots x_n)_F}]=\Phi(\overline{(x_1x_2x_3\cdots x_ny_1y_2y_3\cdots y_n)_F})=$$

$$=(x_1x_2x_3\cdots x_ny_1y_2y_3\cdots y_n)_G=(x_1x_2x_3\cdots x_n)_G(y_1y_2y_3\cdots y_n)_G=$$

$$=\Phi((x_1x_2x_3\cdots x_n)_F).\Phi((y_1y_2y_3\cdots y_n)_F)$$

أي أن $\Phi$ تشاكل وهو غامر لأن المجموعة $S$ مولدة للزمرة $G$. ◦

**مبرهنة ١٣-٤-٤.**

كل زمرة تماثل زمرة الخارج لزمرة حرة.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة توجد زمرة حرة $F$ و تشاكل زمري غامر $\Phi:F\to G$ ومنه $G\approx F/Ker\Phi$. ◦

**تعريف.**

نقول عن الكلمة $w\in W(S)$ إنها غير قابلة للاختصار إذا كانت من الشكل

$$w=x_{\lambda_1}^{\varepsilon_1}x_{\lambda_2}^{\varepsilon_2}x_{\lambda_3}^{\varepsilon_3}\cdots x_{\lambda_t}^{\varepsilon_t}$$

حيث $\varepsilon_i=\pm1$ وأن $x_{\lambda_{i+1}}^{\varepsilon_{i+1}}\neq x_{\lambda_i}^{-\varepsilon_i}$ $i=1,2,3,\cdots,t$.

**مبرهنة ١٣-٤-٥.**

لتكن $S$ مجموعة ما. إن كل صف تكافؤ لعناصر من $W(S)$ يحوي كلمة واحدة فقط غير قابلة للاختصار.

**البرهان.**

لتكن $w\in W(S)$ ولنفرض أن $w=a_1a_2a_3\cdots a_n$ حيث $a_i\in W(S)$ من أجل $1\le i\le n$. ولنفرض أن $w_0=e$ وأن $w_1=a_1$. لنفرض أنه تم تعيين الكلمة $w_i$

ولتعيين الكلمة $w_{i+1}$ نميز حالتين:

- إذا كان آخر عنصر في الكلمة $w_i$ لا يساوي $a_{i+1}^{-1}$ لنضع $w_{i+1}=w_ia_{i+1}$.
- إذا انتهت الكلمة $w_i$ بالعنصر $a_{i+1}^{-1}$ أي إذا كان $w_i=za_{i+1}^{-1}$ عندئذ فإن العنصر $z$ يتعين بشكل وحيد، لأنه إذا كان $z_1a_{i+1}^{-1}=z_2a_{i+1}^{-1}$ فإن $z_1=z_2$ وذلك حسب التعريف، وفي هذه الحالة نفرض أن $w_i=z$.

وهكذا نجد انه بالاستقراء تم تعيين الكلمات $w_0,w_1,w_2,\cdots,w_n$ من الواضح أنه إذا كان $n=0$ فإن $w_n=e$ كما أن الكلمات $w_i$ هي كلمات غير قابلة للاختصار $0\le i\le n$. بالإضافة لذلك فإن الكلمة $w_i$ تكافئ الكلمة $a_1a_2a_3\cdots a_i$ لأجل كل $1\le i\le n$ ومنه فإن $\overline{w_n}=\overline{w}$. وهنا نجد أنه إذا كانت الكلمة $w$ غير قابلة للاختصار فإن $w=w_n$.

لنبرهن الآن أن أي كلمتين متكافئتين تكونان متطابقتين. لتكن

$$u=a_1a_2a_3\cdots a_ra_{r+1}\cdots a_n$$

$$v=a_1a_2a_3\cdots a_rxx^{-1}a_{r+1}\cdots a_n$$

حيث $x\in W(S)$. ولنفرض أنه تم تعيين الكلمات

$$u_0=e,u_1,u_2,u_3,\cdots u_n$$

$$v_0=e,v_1,v_2,v_3,\cdots v_{n+2}$$

وذلك بحسب طريقة البناء الموضحة أعلاه فنجد أن

$$u_0=v_0,u_1=v_1,u_2=v_2,\cdots u_r=v_r$$

ولنبرهن الآن أن $u_r=v_{r+2}$. نميز حالتين:

- إذا كانت نهاية الكلمة $u_r$ لا تساوي $x^{-1}$ عندئذ $v_r=u_r$ وأن $v_{r+1}=v_rx$. ومنه يكون $v_{r+2}=v_r$ وبالتالي يكون $u_r=v_{r+2}$.
- إذا انتهت الكلمة $u_r$ بالعنصر $x^{-1}$ فإن $u_r=zx^{-1}$ ومنه فإن $z=z_0x$ وبالتالي $u_r=z_0xx^{-1}$ ولذلك يكون $v_r=u_r$ و $v_{r+1}=z$ وأن $v_{r+2}=zx^{-1}=u_r$.

وفي كلا الحالتين نجد أن $u_r=v_{r+2}$ ومنه نجد أن $u_{r+i}=v_{r+2+i}$ حيث $i=0,1,2,\cdots,(n-r)$.



## العلاقات والمولدات.

لقد وضعنا أسساً لتعريف زمرة عن طريق المولدات والعلاقات، وقبل ذلك سنوضح خطوات العمل عن طريق المثال التالي:

**مثال ١.**

لتكن $F$ الزمرة الحرة على المجموعة $\{a,b\}$ ولتكن $N$ أصغر زمرة جزئية ناظمية في $F$ والتي تحتوي على المجموعة $\{a^4,b^2,(ab)^2\}$ والتي يمكن دوماً إيجادها.

لنبرهن على أن الزمرة $\frac{F}{N}$ تماثل $D_4$.

نلاحظ أن التطبيق $\varphi:F\longrightarrow D_4$ المعرف بالشكل $\varphi(b)=H$ و $\varphi(a)=L$ حيث $L$ يمثل الدوران بزاوية $90^\circ$ وأن $H$ هو الانعكاس بالنسبة إلى المحور الأفقي، هو تشاكل ونواته تحوي $N$ ولكونه غامراً فإن $F/Ker\varphi\approx H$. من ناحية أخرى، إن المجموعة

$$K=\{N,aN,a^2N,a^3N,bN,abN,a^2bN,a^3bN\}$$

والتي عناصرها هي المرافقات اليسارية للزمرة $N$. إن $\frac{F}{N}=K$، لإثبات ذلك يكفي أن نبرهن أن المجموعة $K$ مغلقة بالنسبة إلى الضرب من اليسار بـ $a$ أو $b$. واضح أن أي عنصر من $\frac{F}{N}$ يمكن أن يولد من $N$ و جداء مناسب من اليسار لقوى العناصر $a,b$. بهذا الشكل نجد أنه لا توجد عناصر في $\frac{F}{N}$ مختلفة عن عناصر $K$.

واضح أن $K$ مغلقة بالنسبة إلى عملية الضرب من اليسار بـ $a$.

لنبرهن على أن $K$ مغلقة بالنسبة إلى عملية الضرب من اليمين بـ $b$ وسنكتفي بحالة واحدة فقط من الحالات الثماني. لنأخذ العنصر الثاني $aN\in K$ ولنوجد $b(aN)$. بما أن $(ab)^2N=N$ وأن $a^4N=N$ نجد أن $babN=a^{-1}N=a^3N$ وبما أن الزمرة $N$ ناظمية فإن $babN=baNb$ ومنه $babN=a^3N$ أي أن $baNb^2=a^3Nb$ وبالتالي بما أن $b^2N=N$ وأن الزمرة $N$ ناظمية فإن $b(aN)=a^3bN\in K$. بشكل مشابه

يبرهن على الحالات المتبقية، بهذا الشكل نجد أن الزمرة $\frac{F}{N}$ تملك على الأكثر ثمانية عناصر. من جهة أخرى، نعلم أن $\frac{F}{Ker\varphi}$ تملك ثمانية عناصر فقط، وبما أن $\frac{F}{Ker\varphi}$ هي زمرة الخارج للزمرة $\frac{F}{N}$ لأن $\frac{F}{Ker\varphi} \approx \frac{F}{N} / \frac{Ker\varphi}{N}$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $\frac{F}{N}$ تحوي ثمانية عناصر ومنه $\frac{F}{N} \approx \frac{F}{Ker\varphi} \approx D_4$. ◊

**تعريف.**

لتكن $G$ زمرة مولدة بالمجموعة $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ ولتكن $F$ الزمرة الحرة على $A$ ولتكن $W=\{w_1,w_2,w_3,\cdots,w_t\}$ مجموعة جزئية من $F$ وأن $N$ أصغر زمرة جزئية ناظمية من $F$ تحوي $W$. نقول إن الزمرة $G$ معينة بالمولدات $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ والعلاقات $w_1=w_2=w_3=\cdots=w_t=e$ إذا وجد تشاكل زمري غامر $f:\frac{F}{N}\longrightarrow G$ يحقق $f(a_iN)=a_i$ لأجل كل $i=1,2,\cdots,n$. نعبر عن الزمرة $G$ في هذه الحالة بالشكل

$$G=\left\langle a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n \middle| \; w_1=w_2=w_3=\cdots=w_t=e\right\rangle$$

**ملاحظة.**

يجب التنويه إلى أننا في التعريف افترضنا أن مجموعة المولدات والعلاقات هي مجموعات منتهية وهذا شرط غير ضروري. بالإضافة لذلك في معظم الأحيان من الأنسب كتابة العلاقات بشكل ضمني، فعلى سبيل المثال العلاقة $a^{-1}b^{-3}ab=e$ تكتب بالشكل $ab=b^3a$.

بالعودة إلى المثال (١) فإن الزمرة $D_4$ يمكن التعبير عنها بالشكل

$$D_4=\left\langle a,b \middle| \; a^4=b^2=(ab)^2=e\right\rangle$$

**مبرهنة ١٣-٤-٦.** $(Dyck,1882)$.

لتكن

$$G=\left\langle a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n \middle| \; w_1=w_2=w_3=\cdots=w_t=e\right\rangle$$

ولتكن

$$H=\left\langle a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n \middle| \; w_1=w_2=w_3=\cdots=w_t=w_{t+1}=\cdots=w_{t+k}=e\right\rangle$$

عندئذ الزمرة $H$ تماثل زمرة خارج للزمرة $G$.

**البرهان.**

نلاحظ أن مجموعة مولدات كل من الزمرتين $G,H$ هي ذاتها المجموعة $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$. لنفرض أن $F$ هي الزمرة الحرة على المجموعة $A$ وأن $K_1$ هي أصغر زمرة جزئية ناظمية في $F$ تحوي المجموعة $W_1=\{w_1,w_2,w_3,\cdots,w_t\}$ وأن $K_2$ هي أصغر زمرة جزئية ناظمية في $F$ تحوي المجموعة $W_2=\{w_1,w_2,w_3,\cdots,w_t,w_{t+1},\cdots,w_{t+k}\}$. وحسب التعريف فإن

$$G\approx\frac{F}{K_1}, H\approx\frac{F}{K_2}.$$

وبما أن $W_1\subseteq W_2$ فإن $K_1\subseteq K_2$ وبالتالي فإن $K_1$ زمرة جزئية ناظمية في $K_2$ ومنه حسب مبرهنة التماثل الثالثة فإن

$$H\approx\frac{F}{K_2}\approx\frac{F}{K_1}/\frac{K_2}{K_1}\approx\frac{G}{N}$$

حيث $N=\frac{K_2}{K_1}$. وهذا يبين لنا أن الزمرة $H$ تماثل زمرة الخارج للزمرة $G$. ◊

**مثال ٢.**

لتكن $G$ زمرة ممثلة بالشكل

$$G=\left\langle a,b \middle| \; a^2=b^2=(ab)^2\right\rangle$$

لندرس تكوين الزمرة $G$.

بفرض أن $F$ هي الزمرة الحرة على المجموعة $A=\{a,b\}$ وأن $N$ هي أصغر زمرة جزئية ناظمية في $F$ تحوي المجموعة $\{(ab)^{-2}a^2,b^{-2}a^2\}$. لنحاول دراسة الزمرة $G$ من دون استخدام الزمرة $N$. لنفرض أن $H=\langle b\rangle$ وأن $S=\{H,aH\}$ فنجد كما في المثال (١) أن المجموعة $S$ مغلقة بالنسبة إلى الضرب بالعناصر $a,b$ من اليسار

وأن $G = H \cup aH$ وهكذا نجد أنه لتحديد عناصر الزمرة $G$ يكفينا معرفة عدد عناصر الزمرة $H$. من خلال العلاقات التي تحققها الزمرة $G$ نلاحظ أن $b^2 = (ab)^2 = abab$ ومنه $b = aba$. كما أن

$$a^2 = b^2 = (aba)(aba) = aba^2ba = ab^4a$$

أي أن $b^4 = e$. وهكذا نجد أن الزمرة $H$ تملك على الأكثر أربعة عناصر وبالتالي فإن الزمرة $G$ تملك على الأكثر ثمانية عناصر وهي بالتحديد

$$e, b, b^2, b^3, a, ab, ab^2, ab^3$$

ومن الممكن أن تكون هذه العناصر غير مختلفة. ◦

**مثـــال ٣.**

لتكن $G$ زمرة ممثلة بالشكل

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^9 = e, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$$

لندرس تكوين الزمرة $G$.

لنأخذ الزمرة $H = \langle b \rangle$ فنجد أن $G = H \cup aH \cup a^2H$. وهكذا نجد أن

$$G = \{a^ib^j \mid 0 \le i \le 2, 0 \le j \le 8\}$$

ومنه فإن الزمرة $G$ تملك على الأكثر 27 عنصراً. وبملاحظة أن $b^{-1} = a^{-1}ba$ نجد $b = (a^{-1}ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}a$ وبما أن $b = ebe$ فإن

$$b = ebe = a^{-3}ba^3 = a^{-2}(a^{-1}ba)a^2 = a^{-2}b^{-1}a^2 =$$

$$= a^{-1}(a^{-1}b^{-1}a)a = a^{-1}ba = b^{-1}$$

ومنه فإن $b^2 = e$ وبما أن $b^2 = e = b^9$ نجد أن $b = e$ وهذا يبين لنا أن الزمرة تحوي ثلاثة عناصر مختلفة وهي $e, a, a^2$. ◦

**مبرهنـــة ١٣-٤-٧.** $(Cayley, 1859)$.

توجد فقط خمس زمر مرتبة كل منها تساوي 8.

**البرهـــان.**

لتكن $G$ زمرة مرتبتها تساوي 8.



– إذا كانت الزمرة $G$ تبديلية فإنه حسب النظرية الأساسية للزمر التبديلية المنتهية تبين لنا أن الزمرة $G$ تماثل واحدة من الزمر التالية

$$Z_8$$

$$Z_4 \oplus Z_2$$

$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$

– لنناقش الحالة التي تكون فيها الزمرة $G$ غير تبديلية.

لنأخذ الزمرة $G_1$ الممثلة بالشكل

$$G_1 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$$

ولنأخذ أيضا الزمرة $G_2$ الممثلة بالشكل

$$G_2 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 \rangle$$

وبالاعتماد على المثال (١) نجد أن $G_1 \approx D_4$ وحسب المثال (٢) فإن $G_2 \approx D_2$.
لهذا السبب يكفي أن نثبت أن الزمرة $G$ تحقق العلاقات المعينة للزمرة $G_1$ أو العلاقات المعينة للزمرة $G_2$. واضح أن الزمرة $G$ تحوي عنصراً مرتبته 4 وليكن $a$. ليكن $b \in G$ بحيث $b \notin \langle a \rangle$ وهذا يبين لنا أن

$$G = \langle a \rangle \cup \langle a \rangle b = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

بما أن $b \notin \langle a \rangle$ فإن $b \ne e, b \ne a, b \ne a^2, b \ne a^3$. من جهة أخرى، بما أن $G$ زمرة و $b \in G$ فإن

$$b^2 \in G = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

وبما أن $b \ne e, b \ne a, b \ne a^2, b \ne a^3$ نجد أن

$$b^2 \ne b, b^2 \ne ab, b^2 \ne a^2b, b^2 \ne a^3b$$

ومنه فإن $b^2 \in \{e, a, a^2, a^3\}$. كما أن $b^2 \ne a$ لأنه في الحالة المعاكسة نجد أن $ab = ba$ وهذا غير ممكن. أيضا نلاحظ أن $b^2 \ne a^3$ لأنه في هذه الحالة نجد أن $ab^2 = b^2a$ وهذا أيضا غير ممكن. مما سبق نجد أنه إما $b^2 = e$ أو $b^2 = a^2$.

- إذا كان $b^2 = e$ وبما أن الزمرة $\langle a \rangle$ ناظمية في $G$ نجد أن $bab^{-1} \in \langle a \rangle$ ومنه $o(bab^{-1}) = o(a)$ وهذا يبين لنا أنه إما $bab^{-1} = a$ أو $bab^{-1} = a^{-1}$. إذا كان $bab^{-1} = a$ نجد أن الزمرة $G$ تبديلية وهذا غير محقق. مما سبق نجد أن $bab^{-1} = a^{-1}$ وبما أن $b^2 = e$ نجد أن $(ab)^2 = e$ وبالتالي تكون الزمرة $G$ محققة للعلاقات المعينة للزمرة $G_1$.

- إذا كان $b^2 = a^2$ وبمناقشة مشابهة نجد أن $(ab)^2 = a^2$ وبالتالي تكون الزمرة $G$ محقق للعلاقات المعينة للزمرة $G_2$.

تطبيق آخر ممتع للعلاقات والمولدات سوف نستخدمه لأجل تصنيف الزمر الثنائية.

من أجل $n \geq 3$ سوف نرمز للزمرة التناظرية للمضلع المنتظم ذي $n$ - رأس بالرمز $D_n$ حيث

$$D_n = \langle a,b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = e \rangle .$$

سوف نعرف الزمرة الثنائية غير المنتهية $D_\infty$ بالشكل

$$D_\infty = \langle a,b \mid a^2 = b^2 = e \rangle$$

إن عناصر هذه الزمرة هي

$$e, a, b, ab, ba, (ab)a, (ba)b, (ab)^2, (ba)^2, (ab)^2 a, (ba)^2 b, (ab)^3, (ba)^3, \ldots$$

**مبرهنة ١٣-٤-٨.**

كل زمرة مولدة بزوج من العناصر مرتبة كل منها تساوي 2 هي زمرة ثنائية.

**البرهان.**

لتكن $G$ زمرة مولدة بعنصرين $a, b$ مرتبة كل منها تساوي 2. سوف نورد البرهان نحسب مرتبة الجداء $ab$.

- إذا كان $o(ab) = \infty$ عندئذ الزمرة $G$ غير منتهية وتحقق العلاقات المعينة للزمرة $D_\infty$. لنبرهن على أن $G \approx D_\infty$. لدينا حسب المبرهنة (١٣-٤-٧) فإن الزمرة $G$ تماثل زمرة خارج للزمرة $D_\infty$ لنفرض أن $G \approx \frac{D_\infty}{H}$ حيث $H$ زمرة جزئية ناظمية في $D_\infty$. ليكن $x \in H$ بحيث $x \neq e$ وبما أن كل عنصر من $D_\infty$ يأخذ أحد الأشكال التالية $(ab)^i, (ba)^i, (ab)^i a, (ba)^i b$ وبسبب التناظر سوف نفرض أنه إما $x = (ab)^i$ أو $x = (ab)^i a$.

- إذا كان $x = (ab)^i$ عندئذ

$$H = (ab)^i H = (abH)^i$$

ومنه $(abH)^{-1} = (abH)^{i-1}$ وبما أن

$$(abH)^{-1} H = (abH)^{-1} = b^{-1} a^{-1} H = baH$$

وهذا يبين لنا أن $aHabHaH = baH = (abH)^{-1}$ وهكذا فإن

$$\frac{D_\infty}{H} = \langle aH, bH \rangle = \langle aH, abH \rangle$$

وبما أن الزمرة $\frac{D_\infty}{H}$ تحقق العلاقات المعينة للزمرة $D_i$ (وذلك بفرض أن $x = aH, y = abH$) وهذا يبين لنا أن الزمرة $G$ منتهية وهذا غير ممكن.

- إذا كان $x = (ab)^i a$ عندئذ $H = (ab)^i aH = (ab)^i HaH$ ومنه

$$(abH)^i = (ab)^i H = (aH)^i = a^{-1} H = aH$$

ومنه نجد أن $\langle abH \rangle \subseteq \langle aH, bH \rangle = \langle aH, abH \rangle$ بالإضافة لذلك فإن

$$(abH)^{2i} = (aH)^{2i} = a^2 H = H$$

وهذا يبين لنا أيضا أن الزمرة $\frac{D_\infty}{H}$ منتهية مما يناقض الفرض. مما سبق نجد أن الزمرة $H = \langle e \rangle$ أي أن الزمرة $G \approx D_\infty$.

- إذا كان $o(ab) = n$ عندئذ وبما أن $G = \langle a,b \rangle = \langle a,ab \rangle$ عندئذ فإن الزمرة $G \approx D_n$ وذلك لأن $b(ab)b = (ab)^{-1}$ والذي يكافئ $ba = (ab)^{-1}$ وهذا ينتج من كون $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$ وذلك لأن مرتبة كل من $a, b$ تساوي 2.

# تمـــاريــن محــلولــة ( ١٣ )

١ – **تعريـــف.**

نقول عن الزمرة التبديلية $G$ إنها أساسية إذا وجد عدد أولي $p$ يحقق

$$\forall g\in G;\quad g^p=e$$

لتكن $G$ عبارة عن $p$ –زمرة. إذا كان $Fr(G)=E$ عندئذ الزمـــرة $G$ هـــي زمـــرة تبديلية أساسية.

**الحـــل.**

لنفرض أن $(G:1)=p^n$ حيث $n\in N^*$ وأن $Fr(G)=E$. حسب المبرهنة (١٢–٦–٢) تكون الزمرة $G$ عديمـــة القـــوى وحســـب المبرهنـــة (١٣–١–١٤) يكـــون $G'\subseteq Fr(G)=E$ ومنه $G'=E$ أي أن الزمرة $G$ تبديلية. لتكن $M$ زمرة جزئيـــة أعظمية في $G$ وحسب المبرهنة (١٣–١–١٤) تكون الزمرة $M$ ناظمية في $G$ ومنـــه فإن مرتبة الزمرة $\frac{G}{M}$ تساوي $q$ حيث $q$ عدد أولي، وبما أن $(G:1)=p^n$ نجـــد أن $(\frac{G}{M}:1)=p$ وبالتالي $g^p\in M$ ؛$\forall g\in G$ وهذا محقق لأجل كل زمرة جزئيـــة أعظمية في $G$ ومنه

$$\forall g\in G;\quad g^p\in Fr(G)=E$$

وبالتالي $\forall g\in G; g^p=e$ أي أن الزمرة $G$ أساسية. ◦

٢ – لـــتكن $G$ زمـــرة و $M\neq G$ زمـــرة جزئيـــة فـــي $G$ و $p$ عـــدداً أوليـــاً. إذا كان $(G:M)=p$ عندئذ الزمرة الجزئية $M$ أعظمية في $G$.

**الحـــل.**

لتكن $K$ زمرة جزئية في $G$ تحوي $M$ وحسب المبرهنة (٢–٣–٣) فإن

$$p=(G:M)=(G:K)(K:M)$$



ومنه إما $(G:K)=p$ أو $(G:K)=1$. إذا كان $(G:K)=p$ عندئذ $(G:M)=1$ وبالتالي $K=M$. إذا كان $(G:K)=1$ فإن $G=K$ وهـــذا يبـــين لنـــا أن الزمـــرة الجزئية $M$ أعظمية في $G$. ◦

٣ – أثبت أن الزمرة

$$G=\langle a,b|\ a^5=b^2=e, ba=a^2b\rangle$$

تماثل الزمرة $Z_2$.

**الحـــل.**

لإثبات أن $G\approx Z_2$ يكفي إثبات أن الزمرة $G$ دوارة ومرتبتها تساوي 2. لدينا

$$(ab)^2=a(ba)b=a(a^2b)b=a^3b^2=a^3=b^2a^3=b(ba)a^2=b(a^2b)a^2=$$
$$=(ba^2)(ba^2)=(ba^2)(ba)a=(ba^2)(a^2b)a=ba^4(ba)=ba^4(a^2b)=$$
$$=bab=a^2b^2=a^2$$

ومنه نجد أن $bab=a$ أي أن $ab=ba$. من جهة أخرى، بما أن $a,b\in G$ فإن $\langle ab\rangle$ زمرة جزئية في $G$ أي أن $\langle ab\rangle\subseteq G$. وبما أن $\gcd(2,5)=1$ فإنـــه يوجـــد $s,t\in Z$ بحيث $1=2s+5t$ ومنه

$$a=a^{2s+5t}=a^{2s}a^{5t}=a^{2s}=a^{2s}b^{2s}=(ab)^{2s}\in\langle ab\rangle$$
$$b=b^{2s+5t}=b^{2s}b^{5t}=b^{5t}=a^{5t}b^{5t}=(ab)^{5t}\in\langle ab\rangle$$

وهذا يبين لنا أن $a,b\in\langle ab\rangle$ أي أن $G\subseteq\langle ab\rangle$، مما سبق نجد أن $G=\langle ab\rangle$ وهكذا نجد أن الزمرة $G$ دوارة. لنبرهن على أن $o(ab)=2$. لدينا

$$(ab)^2=(ba)^2=a(ba)b=a(a^2b)b=a^3b^2=b^2a^3=b(ba)a^2=$$
$$=b(a^2b)a^2=(ba)(ba)a^2=(a^2b)(ab)a^2=a(ab)(ab)a^2=a(ab)^2a^2=$$
$$=aa^2a^2=a^5=e$$

وهكذا نجد أن $(G:1)=o(ab)=2$. مما سبق نجد أن $G\approx Z_2$. ◦

٤ – لتكن $G$ زمرة. أثبت أنه $\forall a,b\in G$ فإن

$$\langle a,b\rangle=\langle a,ab\rangle$$

**الحـــل.**

ليكن $a,b\in G$ عندئذ فإن $a,b\in\langle a,b\rangle$ ومنه $a.b\in\langle a,b\rangle$ وهذا يبين لنا أن

$$\langle a,ab\rangle\subseteq\langle a,b\rangle$$

لدينا $a.b\in\langle a,ab\rangle$ ومنه $(a.b)^{-1}\in\langle a,ab\rangle$ وبالتالي $(a.b)^{-1}.a\in\langle a,ab\rangle$ كما أن

$$(a.b)^{-1}.a=b^{-1}a^{-1}a=b^{-1}\in\langle a,ab\rangle$$

ومنه فإن $b\in\langle a,ab\rangle$ وبالتالي $\langle a,b\rangle\subseteq\langle a,ab\rangle$، مما سبق نجد أن $\langle a,b\rangle=\langle a,ab\rangle$.

٥ – لتكن $G=\langle a,b|\ a^2=b^4=e,ab=b^3a\rangle$.

– عبر عن العنصر $a^3b^2abab^3$ بالشكل $b^ia^j$.

– عبر عن العنصر $b^3abab^3a$ بالشكل $b^ia^j$.

**الحـــل.**

– $a^3b^2abab^3=a^3b^2(b^3a)ab^3=a^3b^5a^2b^3=a^3bb^3=a^3=a$.

– $b^3abab^3a=b^3b^3aab^3a=b^2a^2b^3a=b^5a=ba$.



## تمـــاريــن ( ١٣ )

١ – لتكن $G$ زمرة و $M\subset G$ زمرة جزئية من $G$. أثبت أنه إذا كان $(G:M)=p$ حيث $p$ عدد أولي فإن الزمرة $M$ تكون أعظمية في $G$.

٢ – لتكن $G$ زمرة منتهية. الشروط التالية متكافئة:

– يوجد في $G$ زمرة جزئية أعظمية واحدة فقط.

– $(G:1)=p^n$ حيث $p$ عدد أولي و $n\in N^*$.

٣ – لتكن $G$ زمرة و $M$ زمرة جزئية أعظمية في $G$. أثبت أنه أياً كان $g\in G$ فإن الزمرة $gMg^{-1}$ هي زمرة جزئية أعظمية في $G$.

٤ – لتكن $G$ زمرة. أثبت أن $G'\cap Z(G)\subset Fr(G)$.

٥ – لتكن $G$ زمرة منتهية. الشروط التالية متكافئة:

– الزمرة $G$ دوارة.

– الزمرة $\dfrac{G}{Fr(G)}$ دوارة.

٦ – لتكن $G$ زمرة. الشروط التالية متكافئة:

– الزمرة $G$ قابلة للحل.

– الزمرة $\dfrac{G}{Fr(G)}$ قابلة للحل.

٧ – ليكن $f:G\to G$ تشاكلاً زمرياً. أثبت أن $f(Fr(G))\subset Fr(f(G))$.

٨ – أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها $210=2.3.5.7$.

٩ – أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها $280=2^3.5.7$.

١٠ – أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها $216=2^3.3^3$.

١١ – أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها $315=3^2.5.7$.

١٢ – أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها $240=2^2.3^3.5$.

١٣ – أثبت أن الزمرة $G=\langle x,y|\ x^2=y^n=e,xyx=y^{-1}\rangle$ تماثل الزمرة $D_n$.

١٤ – لتكن $G$ زمرة و $x,y,z \in G$ بحيث $x^2 = y^2 = e$ وأن $yz = zxy$. أثبت أن $xy = yx$.

١٥ – لتكن $G = \langle a,b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle$.

– عبر عن العنصر $a^3b^2abab^3$ بالشكل $b^ia^j$.

– عبر عن العنصر $b^3abab^3a$ بالشكل $b^ia^j$.

١٦ – لتكن $G = \langle x,y \mid x^8 = y^2 = e, yxyx^3 = e \rangle$.

أثبت أن $(G:1) \le 16$. ثم أوجد مركز الزمرة $G$. بفرض أن $(G:1) = 16$ أوجد مرتبة العنصر $xy$.

١٧ – لتكن $G = \langle x,y \mid x^{2n} = e, x^n = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$.

– أثبت أن $Z(G) = \{e, x^n\}$.

– بفرض أن $(G:1) = 4n$ أثبت أن الزمرة $\dfrac{G}{Z(G)}$ تماثل الزمرة $D_n$.

١٨ – لتكن $G = \langle x,y \mid x^4 = y^4 = e, xyxy^{-1} = e \rangle$.

أثبت أن $(G:1) \le 16$. ثم أوجد مركز الزمرة $G$. بفرض أن $(G:1) = 16$ أثبت أن $\dfrac{G}{\langle y^2 \rangle}$ تماثل الزمرة $D_4$.

١٩ – لتكن $G = \langle a,b,c,d \mid ab = c, bc = d, cd = a, da = b \rangle$.

أوجد مرتبة الزمرة $G$.

# الفصل الرابع عشر

# تمديدات الزمر

لتكن $M, F$ زمرتين ما. هدفنا الآن في هذا الفصل هو إيجاد الزمرة $G$ التي تحقق أن الزمرة $H$ تكون ناظمية في $G$ وأن $G/H \approx F$ لأجل ذلك، لابد لنا من بعض التعاريف والتمهيديات ولتكن البداية مع هذا المفهوم.

## ١٤–١. المتتاليات التامة.

**تعريف.**

المتتالية هي مجموعة (منتهية أو غير منتهية) من الزمر $\{A_n\}_{n=1}$ و التشاكلات $\{f_n\}_{n=1}$ حيث $f_n : A_n \to A_{n+1}$ $n = 1,2,3,\cdots$. ونرمز لها

$$\cdots \to A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2} \to \cdots$$

ونقول عن المتتالية السابقة إنها تامة إذا حققت الشرط التالي:

$$Kerf_{n+1} = \operatorname{Im} f_n \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

**تمهيدية ١٤–١–١.**

لتكن $A, B$ زمرتين و $f : A \to B$ تشاكل زمري. عندئذ:

١ – التشاكل $f$ متباين $\Leftrightarrow$ المتتالية $E \to A \xrightarrow{f} B$ تامة.

٢ – التشاكل $f$ غامر $\Leftrightarrow$ المتتالية $A \to B \xrightarrow{f} E$ تامة.

٣ – التشاكل $f$ تماثل $\Leftrightarrow$ المتتالية $E \to A \xrightarrow{f} B \to E$ تامة.

**البرهان.**

١ – لنفرض أن التشاكل $f$ متباين عندئذ $Kerf = E$ ومنه المتتالية $E \to A \xrightarrow{f} B$ تامة حيث التشاكل $(E \to A)$ هو التشاكل المطابق على $E$.

لنفرض أن المتتالية $E \to A \xrightarrow{f} B$ تامة عندئذ $Kerf = E$ ومنه التشاكل $f$ متباين.

٢ – لنفرض أن التشاكل $f$ غامر عندئذ $B = \operatorname{Im} f = Ker(B \to E)$ ومنه المتتالية $A \to B \xrightarrow{f} E$ تامة.

إذا كانت المتتالية $A \to B \xrightarrow{f} E$ تامة عندئذ $\operatorname{Im} f = B$ ومنه التشاكل $f$ غامر.

٣ – ينتج بشكل مباشر من (١) و(٢). ₒ

## ١٤-٢. تمديدات الزمر.

**تعريف.**

نقول عن الزمرة $F$ إنها تمديد للزمرة $H$ إذا وجدت زمرة $G$ تحقق أن المتتالية التالية

$$E \to H \to G \to F \to E$$

تامة.

**تمهيدية ١٤-٢-١.**

إذا كانت المتتالية $E \to H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} F \to E$ من الزمر و التشاكلات الزمرية، تامة عندئذ $\frac{G}{\operatorname{Im} f} \approx F$.

**البرهان.**

بما أن المتتالية السابقة تامة فإن $Kerg = \operatorname{Im} f$. من جهة أخرى وحسب مبرهنة التماثل الأولى وكون التشاكل $f$ غامر نجد أن

$$F \approx \frac{G}{Kerg} = \frac{G}{\operatorname{Im} f}. \quad ₒ$$

**تعريف.**

نقول عن المخطط التالي من الزمر و التشاكلات الزمرية



$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ v\downarrow & & \downarrow u \\ G & \xrightarrow[g]{} & D \end{array}$$

إنه تبديلي إذا كان $uf = gv$.

ونقول عن المخطط التالي من الزمر و التشاكلات الزمرية

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ v\downarrow & & \\ G & & \end{array}$$

إنه تبديلي في كل من الحالات التالية:

– إذا وجد تشاكل $g : B \to G$ يحقق $g \circ f = v$.

– إذا وجد تشاكل $u : G \to B$ يحقق $u \circ v = f$.

**مبرهنة ١٤-٢-٢. (مبرهنة التمهيديات الخمسة).**

لنفرض أن المخطط التالي من الزمر و التشاكلات الزمرية

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & G & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{\lambda} & F \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \downarrow u & & \downarrow v \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & G' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{\lambda'} & F' \end{array}$$

تبديلي وأن سطريه العلوي والسفلي متتاليات تامة. عندئذ:

١ – إذا كانت التشاكلات $\beta, u$ متباينة و التشاكل $\alpha$ غامر فإن التشاكل $\gamma$ يكون متبايناً.

٢ – إذا كانت التشاكلات $\beta, u$ غامرة و التشاكل $v$ متباين فإن التشاكل $\gamma$ يكون غامراً.

٣ – إذا كانت التشاكلات $\beta, u$ تماثلات و التشاكل $\alpha$ غامر و التشاكل $v$ متباين فإن التشاكل $\gamma$ يكون تماثلاً.

**البرهان.**

١– لنبرهن على أن التشاكل $\gamma$ متباين أي لنبرهن على أن $Ker\gamma = E$.

ليكن $x \in Ker\gamma$ عندئذ $\gamma(x) = e$ وبما أن $h' \circ \gamma = u \circ h$ نجد أن

$$u \circ h(x) = h' \circ \gamma(x) = h'(e) = e$$

ومنه $h(x) \in Keru$ وبما أن التشاكل $u$ متباين نجد أن $h(x) = e$ أي أن $x \in Kerh = \operatorname{Im} g$ وبالتالي يوجد $b \in B$ بحيث $x = g(b)$ وبما أن $\gamma \circ g = g' \circ \beta$ نجد أن $\gamma \circ g(b) = g' \circ \beta(b)$ أي أن $g' \circ \beta(b) = \gamma(x) = e$ وبالتالي $\beta(b) \in Kerg' = \operatorname{Im} f'$. ومنه يوجد $a' \in A'$ بحيث $\beta(b) = f'(a')$ ولكون التشاكل $\alpha$ غامراً يوجد $a \in A$ بحيث $a' = f(a)$ ومنه $\beta(b) = f'(\alpha(a))$ وبما أن $f' \circ \alpha = \beta \circ f$ نجد أن $\beta(b) = \beta(f(a))$ ومنه $\beta(b^{-1}.f(a)) = e$ ولكون التشاكل $\beta$ متبايناً نجد أن $b^{-1}.f(a) = e$ ومنه $b = f(a)$ وهكذا نجد أن $x = g(b) = g(f(a))$. وبما أن $Kerg = \operatorname{Im} f$ وأن $f(a) \in Kerg$ نجد أن $x = g(f(a)) = e$، مما سبق نجد أن التشاكل $\gamma$ متباين.

٢ – لنبرهن على أن $\gamma(G) = G'$. ليكن $y' \in G'$ عندئذ $h'(y') \in D'$ ولكون التشاكل $u$ غامراً يوجد $d \in D$ بحيث $u(d) = h'(y')$ وبما أن $v \circ \lambda = \lambda' \circ u$ نجد أن $v \circ \lambda(d) = \lambda' \circ u(d) = \lambda' \circ h'(y')$ ولكن $Ker\lambda' = \operatorname{Im} g'$ فإن $h'(y') \in Ker\lambda'$ ومنه $v \circ \lambda(d) = \lambda'(h'(y')) = e$ ولكون التشاكل $v$ متبايناً نجد $\lambda(d) = e$ أي أن $d \in Ker\lambda = \operatorname{Im} h$ وبالتالي يوجد $y \in G$ بحيث $d = h(y)$.

وبما أن $u \circ h = h' \circ \gamma$ نجد أن

$$h' \circ \gamma(y) = u \circ h(y) = u(d) = h'(y')$$

ومنه $h'(\gamma(y).y'^{-1}) = e$ أي أن $\gamma(y)y'^{-1} \in Kerh' = \operatorname{Im} g'$ ومنه يوجد $b' \in B'$ بحيث $\gamma(y).y'^{-1} = g'(b')$ وبما أن التشاكل $\beta$ غامراً يوجد $b \in B$ بحيث $b' = \beta(b)$ ومنه $\gamma(y)y'^{-1} = g'(b') = g' \circ \beta(b) = \gamma \circ g(b)$ وبالتالي $\gamma(g(b).y^{-1}) = y'$ وبما أن $g(b), y^{-1} \in G$ فإن $g(b)y^{-1} \in G$. مما سبق نجد أن التشاكل $\gamma$ هو غامر.

٣ – ينتج بشكل مباشر من(١) و(٢).○



**تعريف.**

نقول عن التمديدين

$$E \to H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} F \to E$$

$$E \to H \xrightarrow{f'} G^* \xrightarrow{g'} F \to E$$

للزمرة $H$ إنهما متكافئان إذا وجد تشاكل زمري $G \xrightarrow{\lambda} G^*$ من أجله يكون المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{f} & G & \xrightarrow{g} & F \\ & & \lambda \downarrow & & \\ & & G^* & & \end{array}$$

تبديلي لأجل $f', g'$ أي إذا كان $\lambda \circ f = f'$ و $g' \circ \lambda = g$.

نسمي التشاكل $\lambda$ بالتشاكل المكافئ للتمديدين.

**مبرهنة ١٤-٢-٣.**

ليكن

$$E \to H \xrightarrow{g} G \xrightarrow{\varphi} F \to E \quad \text{و}$$

$$E \to H \xrightarrow{g'} G^* \xrightarrow{\varphi'} F \to E$$

تمديدين للزمرة $H$ بوساطة الزمرة $F$. إذا وجد تشاكل زمري $f : G \to G^*$ من أجله التمديدان السابقان متكافئان، عندئذ يكون التشاكل $f$ تماثلاً.

**البرهان.**

بما أن

$$E \to H \xrightarrow{g} G \xrightarrow{\varphi} F \to E \quad \text{و}$$

$$E \to H \xrightarrow{g'} G^* \xrightarrow{\varphi'} F \to E$$

تمديدان للزمرة $H$ بوساطة الزمرة $F$ عندئذ فإن المتتاليات السابقة هي متتاليات تامة. ليكن $f : G \to G^*$ التشاكل الزمري الذي من أجله التمديدان السابقان متكافئان، عندئذ يكون المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{g} & G & \xrightarrow{\varphi} & F \\ & & f\downarrow & & \\ & & G^* & & \end{array}$$

تبديلي لأجل $\varphi', g'$ أي إذا كان $\varphi'\circ f=\varphi$ و $f\circ g = g'$ .

لنأخذ المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccccccc} E & \to & H & \xrightarrow{g} & G & \xrightarrow{\varphi} & F & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow 1_H & & \downarrow f & & \downarrow 1_F & & \downarrow \\ E & \to & H & \xrightarrow{g'} & G^* & \xrightarrow{\varphi'} & F & \to & E \end{array}$$

فنجد أنه تبديلي وأن سطريه متتاليات تامة. وحسب المبرهنة ( ١٤-٢-٢ ) فإن التشاكل $f$ هو تماثل. ∘

بالاعتماد على المبرهنة (١٤-٢-٣) نصل إلى الحقيقة التالية:

**تمهيدية ١٤-٢-٤.**

التمديدات المتكافئة للزمر تشكل علاقة تكافؤ.

**البرهان.**

نتركه تمريناً للقارئ. ∘

**تمهيدية ١٤-٢-٥.**

لتكن $H,K$ زمرتين ما. إن الزمرة $H\oplus K$ هي تمديد للزمرة $H$ بوساطة الزمرة $K$ .

**البرهان.**

نلاحظ أن التطبيق $f: H\oplus K\to K$ المعرف بالشكل $f(h,k)=k$ وذلك أياً كان $(h,k)=H\oplus K$ هو زمري غامر وأن $Kerf = H$ . كذلك التطبيق $g:H\to H\oplus K$ المعرف بالشكل $g(h)=(h,k)$ وذلك $\forall h\in H$ هو تشاكل زمري متباين وأن $\operatorname{Im} g = H$ . وهكذا نجد أن المتتالية

$$E\to H\xrightarrow{g} H\oplus K\xrightarrow{f} K\to E$$

تامة. ومنه الزمرة $H\oplus K$ هي تمديد للزمرة $H$ بوساطة الزمرة $K$ . ∘

**تمهيدية ١٤-٢-٦.**

لتكن $G\xrightarrow{f} B\to E$ متتالية تامة من الزمر و التشاكلات الزمرية. عندئذ يوجد تشاكل $\varphi: B\to G$ من أجله المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow I_B \\ & & B \end{array}$$

تبديلي أي أن $f\circ\varphi = I_B$ .

**البرهان.**

لنعرف العلاقة $\varphi:B\to G$ بالشكل: ليكن $b\in B$ وبما أن التشاكل $f$ غامر يوجد $g\in G$ بحيث $f(g)=b$ . لنضع $\varphi(b)=g$ . وبما أن $f$ تشاكل فإن $f(e)=e$ ومنه نجد أن $\varphi(e)=e$ . إن العلاقة $\varphi$ تطبيق لأنه إذا كان $b_1,b_2\in B$ بحيث $b_1=b_2$ . ومنه يوجد $g_1,g_2\in G$ بحيث $f(g_1)=b_1, f(g_2)=b_2$ وبما أن $b_1=b_2$ فإن $f(g_1)=f(g_2)$ وبالتالي $f(g_1.g_2^{-1})=e$ وحسب تعريف العلاقة $\varphi$ نجد أن $e=\varphi(e)=g_1.g_2^{-1}$ . أي أن $g_1=g_2$ ومنه $\varphi(b_1)=\varphi(b_2)$ وبالتالي $\varphi$ تطبيق. كما أن $\varphi$ تشاكل لأن $b_1.b_2=f(g_1)f(g_2)=f(g_1g_2)$ ومنه

$$\varphi(b_1.b_2)=g_1g_2=\varphi(b_1)\varphi(b_2)$$

لنبرهن على أن $f\circ\varphi=I_B$ . ليكن $b\in B$ عندئذ يوجد $g\in G$ بحيث $f(g)=b$ ومنه

$$f\circ\varphi(b)=f(\varphi(b))=f(g)=b$$

أي أن $f\circ\varphi=I_B$ . ∘

**تمهيدية ١٤-٢-٧.**

لتكن $E\to A\xrightarrow{f} G\to B$ متتالية تامة من الزمر و التشاكلات الزمرية وليكن $\varphi: G\to Aut(\operatorname{Im} f)$ التشاكل الطبيعي المعرف بالشكل $\varphi(g)=T_g$ وذلك أياً كان $g\in G$ . عندئذ العلاقة $\lambda: G\to Aut(A)$ المعرفة بالشكل $\lambda(g)=f^{-1}\circ T_g f$ وذلك $\forall g\in G$ هو تشاكل. بالإضافة لذلك إذا كان التشاكل $\alpha: A\to Aut(A)$ الطبيعي المعرف بالشكل $\alpha(a)=T_a; \quad \forall a\in A$ فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & G \\ \alpha \downarrow & \swarrow \lambda & \\ Aut(A) & & \end{array}$$

تبديلي أي أن $\lambda \circ f = \alpha$.

**البرهان.**

لنبرهن في البداية على أن $\lambda$ تطبيق. ليكن $g_1, g_2 \in G$ بحيث $g_1 = g_2$ عندئذ أياً كان $x \in \mathrm{Im} f$ فإن $g_1 x g_1^{-1} = g_2 x g_2^{-1}$ ومنه $T_{g_1}(x) = T_{g_2}(x)$. من جهة أخرى، $\forall a \in A$ فإن $f(a) \in \mathrm{Im} f$ وبالتالي فإن $T_{g_1}(f(a)) = T_{g_2}(f(a))$ ومنه

$$T_{g_1} \circ f(a) = T_{g_2} \circ f(a)$$

وبما أن $T_{g_i} \circ f(a) \in \mathrm{Im} f$ فإن $f^{-1} \circ T_{g_i} \circ f(a) \in A$ وأن

$$f^{-1} \circ T_{g_1} \circ f(a) = f^{-1} \circ T_{g_2} \circ f(a) \qquad \forall a \in A$$

ومنه $f^{-1} \circ T_{g_1} \circ f = f^{-1} \circ T_{g_2} \circ f$ أي أن $\lambda(g_1) = \lambda(g_2)$. كما أن $\lambda$ تشاكل لأنه أياً كان $g_1, g_2 \in G$ فإن

$$\lambda(g_1.g_2) = f^{-1} \circ T_{g_1 g_2} \circ f = f^{-1} \circ T_{g_1} \circ T_{g_2} \circ f =$$
$$= (f^{-1} \circ T_{g_1} \circ f)(f^{-1} \circ T_{g_2} \circ f) = \lambda(g_1) \circ \lambda(g_2)$$

لنفرض أن $\alpha : A \to Aut(A)$ التشاكل الطبيعي. لدينا $\forall a \in A$ فإن $f(a) \in G$ ومنه $\lambda(f(a)) = f^{-1} \circ T_{f(a)} \circ f$ وهكذا نجد أنه أياً كان $x \in A$ فإن

$$(\lambda \circ f(a))(x) = (f^{-1} \circ T_{f(a)} \circ f)(x) = f^{-1} \circ T_{f(a)}(f(x)) =$$
$$= f^{-1}[f(a)]^{-1} f(x) f(a) = f^{-1} f(a^{-1}xa) = a^{-1}xa = T_a(x)$$

أي أن $(\lambda \circ f)(a) = T_a$ وذلك $\forall a \in A$ وبالتالي $\forall a \in A$ فإن $(\lambda \circ f)(a) = T_a = \alpha(a)$ مما سبق نجد أن $\lambda \circ f = \alpha$. ∘

**تمهيدية ١٤-٢-٨.**

ليكن $E \to H \xrightarrow{f} G^* \xrightarrow{g} F \to E$ تمديد للزمرة $H$ بوساطة الزمرة $F$، عندئذ يوجد تمديد مكافئ للتمديد السابق من الشكل



$$E \to H \xrightarrow{I_H} G^* \to F \to E$$

**البرهان.**

نتركه تمريناً للقارئ. ∘

## ١٤-٣. التمديدات المنشطرة.

**تعريف.**

ليكن تمديد للزمرة $A$ بوساطة الزمرة $B$. نقول عن التمديد السابق إنه منشطر إذا وجد تشاكل متباين $T : B \to G$ يحقق $\varphi \circ T = I_B$.

**مبرهنة ١٤-٣-١.**

ليكن

$$E \to A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \to E$$

تمديد للزمرة $A$ بوساطة الزمرة $B$. الشروط التالية متكافئة:

١ – التمديد السابق منشطر.

٢ – توجد في $G$ زمرة جزئية $H$ تحقق $G = \mathrm{Im} f.H$ وأن $\mathrm{Im} f \cap H = E$.

٣ – يوجد تمديد مكافئ للتمديد السابق $E \to A \xrightarrow{I_A} G^* \to B \to E$ وزمرة جزئية $K$ من $G^*$ تحقق $G^* = A.K$ وأن $A \cap K = E$.

**البرهان.**

(١)⇐(٢). بما أن التمديد $E \to A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \to E$ منشطر فإنه يوجد تشاكل متباين $T : B \to G$ يحقق $\varphi \circ T = I_B$. لنفرض أن $T(B) = H$ فنجد أن $H$ هي زمرة جزئية من $G$ لأن $T$ تشاكل. ليكن $y \in f(A) \cap H$ عندئذ بما أن $y \in f(A)$ يوجد $a \in A$ بحيث $y = f(a)$ وبما أن $Ker\varphi = \mathrm{Im} f$، فإن $\varphi(y) = \varphi(f(a)) = e$. وبما أن $y \in H$ يوجد $b \in B$ بحيث $y = T(b)$ ومنه

$$e = \varphi(y) = \varphi(T(b)) = \varphi \circ T(b) = b$$

لأن $\varphi \circ T = I_B$. مما سبق نجد أن $y = T(b) = T(e) = e$ ومنه $\mathrm{Im} f \cap H = E$.

وبما أن الزمرة $Ker\varphi = \mathrm{Im} f$ فإن $\mathrm{Im} f$ ناظمية في $G$ وبالتالي الجداء $\mathrm{Im} f.H$

هو زمرة جزئية في $G$ ومنه $\operatorname{Im} f.H \subseteq G$. ليكن $g \in G$ عندئذ $\varphi(g) \in B$ ومنه يوجد $b \in B$ بحيث $\varphi(g) = b$ وبالتالي $\varphi(g).b^{-1} = e$ وبما أن $\varphi \circ T = I_B$ فإن

$$e = \varphi(g).b^{-1} = \varphi(g).\varphi \circ T(b^{-1}) = \varphi(b).\varphi(T(b^{-1})) = \varphi(g.T(b^{-1}))$$

ومنه $g.T(b^{-1}) \in Ker\varphi = \operatorname{Im} f$ أي أن $g.(T(b))^{-1} \in \operatorname{Im} f$ وبالتالي

$$g \in \operatorname{Im} f.T(b) \subseteq \operatorname{Im} f.H$$

وهكذا نجد أن $G \subseteq \operatorname{Im} f.H$ أي أن $G = \operatorname{Im} f.H$ بالإضافة إلى ذلك $\operatorname{Im} f \cap H = E$.

(٢)⇐(٣). بالاعتماد على التمهيدية (١٤-٢-٨) يوجد تمديد للزمرة $A$ بوساطة الزمرة $B$ من الشكل

$$E \to A \xrightarrow{I_A} G^* \to B \to E$$

مكافئ للتمديد

$$E \to A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \to E$$

وحسب المبرهنة (١٤-٢-٣) يوجد تشاكل $\lambda : G \to G^*$ وهذا التشاكل هو تماثل.
وحسب الفرض توجد في $G$ زمرة جزئية $H$ تحقق $f(A) \cap H = E$ وأن $G = f(A).H$. لنفرض أن $\lambda(H) = K$ فنجد أن $K$ زمرة جزئية في $G^*$ وأن

$$G^* = \lambda(G) = \lambda(f(A).H) = \lambda(f(A)).\lambda(H) = \lambda \circ f(A).\lambda(H)$$

وبما أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & G \\ & \searrow^{I_A} & \downarrow \lambda \\ & & G^* \end{array}$$

تبديلي نجد أن $\lambda \circ f = I_A$. ومنه

$$G^* = \lambda \circ f(A).\lambda(H) = I_A(A).\lambda(H) = A.K$$

من جهة أخرى، فإن

$$A \cap K = I_A(A) \cap \lambda(H) = \lambda \circ f(A) \cap \lambda(H) = \lambda(f(A)) = \lambda(E) = E^*$$

(٣)⇐(١). ليكن $\lambda : G \to G^*$ التشاكل المكافئ للتمديدين



$$E \to A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \to E$$
$$E \to A \xrightarrow{I_A} G \xrightarrow{\varphi^*} B \to E$$

عندئذ

$$B = \varphi^*(G^*) = \varphi^*(A.K) = \varphi^*(I_A(A).K) = \varphi^* \circ I_A(A).\varphi * (K) =$$
$$= E.\varphi^*(K) = \varphi^*(K)$$

وذلك لأن $Ker\varphi^* = \operatorname{Im} I_A$ أي أن $\varphi^* \circ I_A(A) = E$. لنفرض أن $\varphi_0^* = \varphi_K^*$ مقصور $\varphi^*$ على $K$ فنجد أن $\varphi_0^* : K \to B$ هو تشاكل غامر، لأن $\varphi_0^*(K) = \varphi^*(K) = B$.
ليكن $u \in Ker\varphi_0^*$ عندئذ $u \in K$ و $u \in I_A(A) = A$ وبالتالي $u \in K \cap A = E$
وهذا يبين لنا أن التشاكل $\varphi_0^* : K \to B$ هو تماثل، ومنه نجد أن التشاكل

$$T = \lambda^{-1} \circ \varphi_0^{*-1} : B \to G$$

هو تشاكل متباين. وبما أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \lambda \downarrow & \nearrow & \\ K & \varphi_0^* & \end{array}$$

تبديلي نجد أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \lambda^{-1} \uparrow & \nearrow & \\ K & \varphi_0^* & \end{array}$$

أيضا تبديلي وذلك لأن التشاكل $\lambda$ هو تماثل. ومنه

$$\varphi \circ T = \varphi \circ \lambda^{-1} \circ \varphi_0^{*-1} = \varphi_0^* \circ \varphi_0^{*-1} = I$$

وهذا يبين لنا أن التمديد

$$E \to A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \to E$$

هو تمديد منشطر. ه

**مبرهنـــة ١٤-٣-٢.**

ليكن

$$E \to A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \to E$$

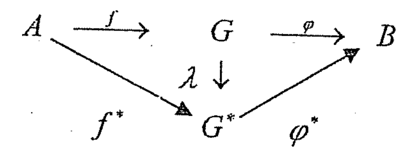
تمديد للزمرة $A$ بوساطة الزمرة $B$. إذا كان التمديد السابق منشطراً عندئذ أي تمديـد مكافئ للتمديد السابق هو أيضا تمديد منشطر.

**البرهـــان.**

ليكن $E \to A \xrightarrow{f^*} G^* \xrightarrow{\varphi^*} B \to E$ تمديد مكافئ للتمديد

$$E \to A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \to E$$

عندئذ يوجد التشاكل المكافئ $\lambda : G \to G^*$ الذي من أجله المخطط التالي




تبديلي. كما أن $\lambda : G \to G^*$ هو تماثل وذلك حسب المبرهنة (١٤-١-٣).

لنفرض أن التمديد $E \to A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \to E$ منشطر عندئذ يوجد تشـــاكل متباين $T : B \to G$ يحقق $T \circ \varphi = I_B$. لنضع $T^* = \lambda \circ T : B \to G^*$ فنجد أن $T^*$ تشاكل متباين لأن كلاً من $T, \lambda$ متباين بالإضافة لذلك فإن

$$\varphi^* \circ T^* = \varphi^* \circ \lambda \circ T = \varphi \circ T = I_B$$

مما سبق نجد أن التمديد $E \to A \xrightarrow{f^*} G^* \xrightarrow{\varphi^*} B \to E$ هو تمديد منشطر. ₒ

**تعريـف.**

لتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $G$. نقول عن الزمرة $G$ إنها منشـــطرة فوق $K$ إذا وجدت زمرة جزئية $H$ من $G$ تحقق $G = H.K$ وأن $K \cap H = E$.

**مبرهنـــة ١٤-٣-٣.**

لتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $G$. الشروط التالية متكافئة:

١ – الزمرة $G$ منشطرة فوق $K$.

٢ – التمديد $E \to K \xrightarrow{\tau} G \xrightarrow{\pi} \frac{G}{K} \to E$ هو تمديد منشـــطر حيـــث $\pi$ هـــو التشاكل القانوني الغامر و $\tau$ هو التشاكل الطبيعي.

**البرهـــان.**

(١)⇐(٢). لنفرض أن الزمرة $G$ منشطرة فوق $K$ عندئذ توجد زمرة جزئية $H$ من $G$ بحيث $G = H.K$ وأن $K \cap H = E$. كما أن

$$\frac{G}{K} = \frac{HK}{K} \approx \frac{H}{H \cap K} \approx H$$

لنرمز للتماثل $\frac{G}{K} \approx H$ بـــالرمز $f : \frac{G}{K} \to H$ فنجـــد أن $f$ تشـــاكل متبـــاين وأن $\pi \circ f = I_{\frac{G}{K}}$. وبمـــا أن المتتاليـــة $E \to K \to G \to \frac{G}{K} \to E$ تامـــة نجـــد أن $E \to K \to G \to \frac{G}{K} \to E$ هو تمديد منشطر.

(٢)⇐(١). لنفرض أن التمديد $E \to K \to G \to \frac{G}{K} \to E$ هو تمديد منشطر عندئذ حسب المبرهنة (١٤-٣-١) توجد في $G$ زمرة جزئية $H$ تحقق $G = H.K$ ومنـــه نجد أن الزمرة $G$ منشطرة فوق $K$. ₒ

**تمهيديـــة ١٤-٣-٤.**

لتكن $K$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $G$ و $H$ زمرة جزئية من $G$. عندئذ إذا كانت الزمرة $H$ متممة للزمرة $K$ فإنه أياً كان $g \in G$ فإن الزمرة $gHg^{-1}$ تكـــون متممة للزمرة $K$.

**البرهـــان.**

لنفرض أن الزمـــرة $H$ متممـــة للزمـــرة $K$ فـــي $G$ عندئـــذ $G = H.K$ وأن $H \cap K = E$. ليكن $g \in G$ عندئذ $gKg^{-1} = K$ لأن الزمرة $K$ ناظمية في $G$ ومنه

$$G = gGg^{-1} = gKHg^{-1} = (gHg^{-1})(gKg^{-1}) = (gHg^{-1})K$$

كما أن

$$gHg^{-1} \cap K = gHg^{-1} \cap gKg^{-1} = g(H \cap K)g^{-1} = geg^{-1} = e$$

مما سبق نجد أن الزمرة $gHg^{-1}$ متممة للزمرة $K$. ٥

**مبرهنـــة ١٤-٣-٥.**

لتكن $G$ زمرة و $K$ زمرة جزئية ناظمية في $G$ ولتكن $M$ زمرة جزئية مـــن $G$ بحيث $K \subseteq M$. عندئذ:

١ – إذا كانت الزمرة $G$ منشطرة فوق $K$ فإن الزمرة $M$ تكون منشطرة فوق $K$.

٢ – إذا كانت الزمرة $M$ ناظمية في $G$ وكانت $G$ منشطرة فوق $M$ فإن الزمـــرة $\frac{G}{K}$ تكون منشطرة فوق $\frac{M}{K}$.

**البرهـــان.**

١ – لنفرض أن الزمرة $G$ منشطرة فوق $K$ عندئذ توجد في $G$ زمرة جزئيـــة $H$ تحقق $G = HK$ وأن $H \cap K = E$. من جهة أخرى بما أن $K \subseteq M$ وأن $K$ ناظميـــة في $G$ فإن $K$ ناظمية في $M$، كما أن $M = K(H\cap M)$ وأن

$$K\cap(H\cap M) = (K\cap H)\cap M = E\cap M = E$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $H\cap M$ متممة للزمرة $K$ في $M$ أي أن الزمرة $M$ تكـــون منشطرة فوق $K$.

٢ – لنفرض أن الزمرة $M$ ناظمية في $G$ وأن $G$ تكون منشطرة فـــوق $M$. عندئـــذ توجد في $G$ زمرة جزئية $H$ بحيث $G = HM$ وأن $H\cap M = E$. وبما أن $K\subseteq M$ وأن $K$ ناظمية في $G$ فإنه حسب المبرهنة (٦-٥) تكون الزمرة $\frac{M}{K}$ ناظمية في $\frac{G}{K}$.

وبما أن $K$ ناظمية في $G$ فإن الجداء $HK$ زمرة جزئية فـــي $G$ ومنـــه $\frac{HK}{K}$ زمـــرة جزئية في $\frac{G}{K}$ وأن $\frac{G}{K} = \frac{HM}{K} = \frac{(HK)M}{K} = \frac{HK}{K}\frac{M}{K}$ كما أن

$$\frac{HK}{K}\cap\frac{M}{K} = \frac{HK\cap M}{K} = \frac{HK\cap MK}{K} = \frac{(H\cap M)K}{K} = K$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $\frac{G}{K}$ منشطرة فوق $\frac{M}{K}$. ٥

# تمـــاريـن محلـولـــة (١٤)

١- لتكن $G$ زمرة بسيطة منتهية مرتبتها عدد زوجي أكبر من 2. عندئذ $(G:1)$ تقبـــل القسمة على 8 أو 12.

**الحـــل.**

لنفرض أن $(G:1)$ لا تقبل القسمة على 8. بما أن $(G:1)$ تقبل القســـمة علـــى 2 فـــإن الزمرة $G$ تحوي 2–زمرة جزئية سيلوفية ولتكن $K$. وبما أن $(G:1)\neq 2$ وتقبل القسمة على 2 فإن $E\neq K\subset G$ وحسب الفرض فـــإن $(K:1)\le 4$ ومنـــه إمـــا $K\approx Z_2$ أو $K\approx Z_2\oplus Z_2$ أو $K\approx Z_4$ وهذا يبين لنا أن الزمـــرة $K$ تبديليـــة كمـــا أن $K\subset C(K)$ وأيضا الزمرة $C(K)$ ناظمية في $N(K)$. من جهة أخرى، بما أن الزمرة $K$ عبارة عـــن 2–زمرة جزئية سيلوفية في $G$ فإن مرتبة الزمرة $\frac{N(K)}{C(K)}$ تكون فردية.

إذا كان $C(K) = N(K)$ عندئذ $K\subseteq Z(N(K))$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $K$ عديمة القوى مما يناقض كونها بسيطة ومنه $C(K)\subset N(K)$. وحسب التمرين المحلـــول (٧-٢) فـــإن الزمرة $\frac{N(K)}{C(K)}$ تماثل زمرة جزئية من الزمـــرة $Aut(K)$. وبمـــا أنـــه إمـــا $K\approx Z_2$ أو $K\approx Z_2\oplus Z_2$ أو $K\approx Z_4$ وحسب المبرهنة (٧-٥) فإنـــه إمـــا $Aut(K)\approx U(2)$ أو $Aut(K)\approx U(4)$ أو $Aut(K)\approx GL_2(Z_2)$ أي أنـــــه إمـــــا $(Aut(K):1)=1$ أو $(Aut(K):1)=2$ أو $(Aut(K):1)=6$ وبما أن مرتبة الزمرة $\frac{N(K)}{C(K)}$ هو عدد فردي نجد أن $(\frac{N(K)}{C(K)}:1)=3$ وأن $K\approx Z_2\oplus Z_2$. مما سبق نجد أن $(G:1)$ تقبـــل القســـمة على 12. ٥

٢- لتكن الزمرة $G$ تمديد للزمرة $K$ بوساطة الزمرة $H$. عندئذ يوجد تشاكل زمـــري $\psi: G \longrightarrow H\times Aut(K)$ يحقق أن $Ker\psi = Z(K)$.

**الحـــل.**

بما أن الزمرة $G$ تمديد للزمرة $K$ بوساطة الزمرة $H$. عندئذ يوجد تشاكل زمري غـامر $\varphi : G \longrightarrow H$ يحقق أن $Ker\varphi = K$. وبما أن الزمرة $K$ ناظمية فـي $G$ فـإن $gkg^{-1}$ وذلك أياً كان $g\in G, k\in K$. لنعرف العلاقة $\sigma : G\longrightarrow Aut(K)$ بالشكل

$$\forall g\in G, \sigma(g)=T_g$$

حيث

$$\forall k\in K;\quad T_g(k)=gkg^{-1}\in K$$

من الواضح أن العلاقة $\sigma$ تشاكل. من جهة أخرى بما أن الزمر $H, Aut(K)$ هي زمـر جزئية ناظمية في الزمرة $H\times Aut(K)$ لنعرف العلاقة

$$\psi : G\longrightarrow H\times Aut(K)$$

بالشكل

$$\forall g\in G;\quad \psi(g)=(\phi(g),\sigma(g))$$

فنجـد أن العلاقـة $\psi$ تطبيـق لأنـه إذا كـان $g_1,g_2\in G$ بحيـث $g_1=g_2$ فـإن $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$ وأن $\sigma(g_1)=\sigma(g_2)$ ومنـه $(\varphi(g_1),\psi(g_2))=(\varphi(g_1),\psi(g_2))$ مما سبق نجد أن $\psi(g_1)=\psi(g_2)$. كما أن $\psi$ تشاكل فإن

$$\psi(g_1.g_2)=(\varphi(g_1.g_2),\sigma(g_1.g_2))=(\varphi(g_1).\varphi(g_2),\sigma(g_1).\sigma(g_2))=$$
$$=(\varphi(g_1),\sigma(g_1))(\varphi(g_2),\sigma(g_2))=\psi(g_1).\psi(g_2)$$

كمـا أن $Ker\psi = Ker\varphi\cap Ker\sigma$، لأنـه إذا كـان $y\in Ker\psi$ عندئـذ $\psi(y)=(\varphi(y),\sigma(y))=(e,e)$ ومنـه $\varphi(y)=\sigma(y)=e$ وبالتـالي $y\in KerH, y\in Ker\sigma$ أي أن $y\in KerH\cap Ker\sigma$ ومنه

$$Ker\psi\subseteq KerH\cap Ker\sigma$$

بشكل مشابه نبرهن على الاحتواء المعاكس. وهذا يبين لنا أن

$$Ker\psi = KerH\cap Ker\sigma = K\cap C(K)=Z(K)$$ ۰

# تمـــارين (١٤)

١- لتكن $G$ زمرة منتهية. أثبت أن الزمرة $\frac{Fit(G)}{Fr(G)}$ هي زمرة تبديلية.

٢- لتكن $G$ زمرة منتهية قابلة للحل. أثبت أن الزمرة $C(\frac{Fit(G)}{Fr(G)})=Fit(G)$.

٣- لتكن $G$ زمرة منتهية و $A$ زمرة جزئية ناظمية و تبديليـة فـي $G$ تحقـق $A\cap Fr(G)=E$. أثبت أن الزمرة $G$ منشطرة فوق $A$.

٤- لتكن $G$ زمرة و $K,M$ زمراً جزئية ناظمية في $G$ تحقق $K\subseteq M$. أثبت أنه إذا كانت الزمرة $G$ منشطرة فوق $K$ وأن متمم الزمرة $K$ هـي $H$ عندئـذ الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة $G$ منشطرة فوق $M$ هو أن تكـون الزمرة $H$ منشطرة فوق $H\cap M$.

٥- لتكن $G$ زمرة و $K,L$ زمراً جزئية ناظميـة فـي $G$ ولنفـرض أن الجـداء $M=K.L$ زمرة جزئية ناظمية في $G$. بفرض أن الزمـرة $\frac{G}{L}$ منشـطرة فوق $\frac{M}{L}$ وأن الزمرة $\frac{H}{L}$ متممة للزمرة $\frac{M}{L}$ في $\frac{G}{L}$. وبفرض أن الزمـرة $H$ منشطرة فوق $H\cap L$. أثبت أن الزمرة $G$ منشطرة فوق $K$.

٦- لتكن زمرة $G$ و $K$ زمرة جزئية ناظمية فـي $G$. ولـيكن $v:G\longrightarrow \frac{G}{K}$ التشاكل القانوني الغامر. عندئذ:

أ – الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة $G$ منشطرة فوق $K$ هو أن يوجد تشاكل زمري $u:\frac{G}{K}\longrightarrow G$ يحقق أن $v.u=I_{\frac{G}{K}}$.

ب – إذا كانت الزمرة $\frac{G}{K}$ دوارة غير منتهية فإن الزمرة $G$ تكون منشطرة فوق $K$.

# الفصل الخامس عشر

## نظرية الفئات

يعد كل من S.Eilenberg & S.Maclane أول من أدخل مفهوم الفئة و الدالي وذلك عام 1944، وذلك لحل بعض المشاكلات الناتجة عن نظرية الزمر والفضاءات الطبولوجية. وقد وجدت هذه المفاهيم تطبيقات في مجالات أخرى من فروع الرياضيات.

### ١٥-١. الفئة و الفئة الثنوية.

**تعريف.**

نقول إنه توجد لدينا فئة $\mathfrak{R}$ إذا كان لدينا:

١ - صف $Ob(\mathfrak{R})$ يمثل عناصر الفئة $\mathfrak{R}$ والتي تسمى أشياء الفئة ونرمز لها $A,B,D,\cdots \in Ob(\mathfrak{R})$.

٢ - صف $Mor(\mathfrak{R})$ ويمثل مورفيزمات الفئة $\mathfrak{R}$ ويحقق أياً كان $A,B \in ob(\mathfrak{R})$ فإن $\mathfrak{R}(A,B)$ تشكل مجموعة وتمثل مجموعة الأسهم من $A$ إلى $B$ ويرمز لها

$$\mathfrak{R}(A,B) = Hom_{\mathfrak{R}}(A,B) \in Mor(\mathfrak{R})$$

بالإضافة إلى ذلك، إن عناصر الفئة و مورفيزمات هذه الفئة يجب أن تحقق:

١- أياً كانت العناصر $A,B,D \in ob(\mathfrak{R})$ يوجد تطبيق

$$\mu : \mathfrak{R}(A,B) \times \mathfrak{R}(B,D) \to \mathfrak{R}(A,D)$$

معرف بالشكل $\mu(f,g) = g.f$ وذلك أياً كان $f \in \mathfrak{R}(A,B), g \in \mathfrak{R}(B,D)$. نسمي هذه العملية بعملية تركيب المورفيزمات.

٢- أياً كان $f \in \mathfrak{R}(A,B), g \in \mathfrak{R}(B,D), \psi \in \mathfrak{R}(D,C)$ فإن

$$(\psi.g).f = \psi.(g.f)$$

أي أن عملية تركيب المورفيزمات تجميعية.

٣- أياً كان $A \in Ob(\Re)$ يوجد $I_A : A \to A$ ويسمى المورفيزم المطابق ويحقق $I_A . f = f$ و $g . I_A = g$ . وذلك أياً كان $f \in \Re(B,A), g \in \Re(A,D)$ و أيـاً كـان $B,D \in Ob(\Re)$.

٤- أياً كان $A,B,A',B' \in Ob(\Re)$ بحيث $(A,B) \neq (A',B')$ فإن $\Re(A,B) \cap \Re(A',B') = \Phi$.

**أمثلـة.**

**١ - فئـة المجموعـات $Set`s$.**

أشياء هذه الفئة هي المجموعات.

من أجل أي مجموعتين $A,B \in Ob(Set`s)$ فإن $Hom_{Set`s}(A,B)$ تمثل مجموعة كـل التطبيقات من $A$ إلى $B$.

أياً كان $A,B,D \in Ob(Set`s)$ يوجد تطبيق

$$\mu : Hom_{Set`s}(A,B) \times Hom_{Set`s}(B,D) \to Hom_{Set`s}(A,D)$$

معرف بالشكل $\mu(f,g) = g \circ f$ وذلك أياً كان

$$f \in Hom_{Set`s}(A,B), g \in Hom_{Set`s}(B,D)$$

حيث أن العملية $(\circ)$ تمثل عملية تركيب التطبيقات وهذه العملية تجميعية بالإضافة إلى ذلك أياً كان $A \in Ob(Set`s)$ يوجد التطبيق المطـابق $I_A : A \to A$ الـذي يحقـق $I_A . f = f$ و $g . I_A = g$ . وذلك أياً كان

$$f \in Hom_{Set`s}(B,A), g \in Hom_{Set`s}(A,D)$$

و أياً كان $B,D \in Ob(Set`s)$ . كما أنه أياً كـان $A,B,A',B' \in Ob(Set`s)$ بحيـث $(A,B) \neq (A',B')$ فإن $Hom_{Set`s}(A,B) \cap Hom_{Set`s}(A',B') = \Phi$.

**٢ - فئـة الـزمـر $\wp$.**

أشياء هذه الفئة هي زمر.

من أجل أي زمرتين $A,B \in Ob(\wp)$ فإن $Hom_{\wp}(A,B)$ تمثل مجموعة كل التشاكلات من الزمرة $A$ إلى الزمرة $B$.

أياً كان $A,B,D \in Ob(\wp)$ يوجد تطبيق

$$\mu : Hom_{\wp}(A,B) \times Hom_{\wp}(B,D) \to Hom_{\wp}(A,D)$$

معرف بالشكل $\mu(f,g) = g \circ f$ وذلك أياً كان

$$f \in Hom_{\wp}(A,B), g \in Hom_{\wp}(B,D)$$

حيث إن العملية $(\circ)$ تمثل عملية تركيب التطبيقات وهذه العملية تجميعيـة بالإضـافة لذلك أياً كان $A \in Ob(\wp)$ يوجـد التطبيـق المطـابق $I_A : A \to A$ الـذي يحقـق $I_A . f = f$ و $g . I_A = g$ . وذلك أياً كان $f \in Hom_{\wp}(B,A), g \in Hom_{\wp}(A,D)$ و أيـاً كـان $B,D \in Ob(\wp)$ . كمـا أنـه أيـاً كـان $A,B,A',B' \in Ob(\wp)$ بحيـث $(A,B) \neq (A',B')$ فإن $Hom_{\wp}(A,B) \cap Hom_{\wp}(A',B') = \Phi$.

**٣ - فئـة الزمر التبديليـة $A\ell$.**

أشياء هذه الفئة هي الزمر التبديلية. وتحقق جميع شروط الفئة كما هو الحـال فـي المثال السابق.

**الفئـة الثنـويـة.**

لتكن $\Re$ فئة ما. الفئة الثنوية للفئة $\Re$ يرمز لها $\Re^{op}$ وتتألف من:

١ - صف $Ob(\Re^{op}) = Ob(\Re)$ ويمثل عناصر الفئة $\Re^{op}$.

٢ - **صـف** $Mor(\Re^{op})$ ويمثـل مورفيزمـات الفئـة $\Re^{op}$ ويحقـق أيـاً كان $A,B \in Ob(\Re)$ فإن

$$\Re^{op}(A,B) = Hom_{\Re^{op}}(A,B) = Hom_{\Re}(B,A) \in Mor(\Re)$$

بالإضافة لذلك، إن عناصر الفئة $\Re^{op}$ و مورفيزماتها يجب أن تحقق:

١- أياً كانت العناصر $A,B,D \in Ob(\Re)$ يوجد تطبيق

$$\mu:\Re^{op}(A,B)\times\Re^{op}(B,D)\to\Re^{op}(A,D)$$

معرف بالشكل

$$\mu(f,g)=g.f=f.g$$

وذلك أياً كان $f\in\Re^{op}(A,B), g\in\Re^{op}(B,D)$ .

واضح أن هذه العملية تحقق جميع شروط الفئة. نسمي الفئة $\Re^{op}$ الفئة الثنوية للفئة $\Re$.

ينتج من التعريف أن $(\Re^{op})^{op}=\Re$.

**تعريف.**

لتكن $\Re$ فئة وليكن $u\in\Re(A,B)$ حيث $A,B\in Ob(\Re)$. أياً كان $X\in Ob(\Re)$. لنأخذ التطبيق

$$\alpha:\Re(X,A)\to\Re(X,B)$$

المعرف بالشكل التالي: $\forall f\in(X,A)$ فإن $\alpha(f)=uf$ .

والتطبيق

$$\beta:\Re(B,X)\to\Re(A,X)$$

المعرف بالشكل التالي: $\forall g\in(B,X)$ فإن $\beta(g)=gu$ .

١ – نقول عن المورفيزم $u$ إنه مونومورفيزم إذا كان التطبيق $\alpha$ متباين.

٢ – نقول عن المورفيزم $u$ إنه ايبومورفيزم إذا كان التطبيق $\beta$ متباين.

**تمهيدية ١٥-١-١.**

في أي فئة $\Re$ القضايا التالية صحيحة:

١ – تركيب أي مورفيزمين هو مورفيزم.

٢ – ليكن $u,v\in Mor(\Re)$. إذا كان $vu$ مونومورفيزم فإن $u$ مونومورفيزم.

٣ – تركيب أي ايبومرفيزمين هو ايبومورفيزم.

٤ – ليكن $u,v\in Mor(\Re)$. إذا كان $vu$ ايبومورفيزم فإن $v$ ايبومورفيزم.



**البرهان.**

ليكن $u\in\Re(A,B)$ و $v\in\Re(B,D)$ عندئذ $v.u\in\Re(A,D)$ ومنه أياً كان $X\in Ob(\Re)$ ولنأخذ التطبيقات

$$\alpha:\Re(X,A)\to\Re(X,B)$$

المعرف بالشكل $\alpha(f)=uf$ وذلك أياً كان $f\in\Re(X,A)$ .

$$\beta:\Re(X,B)\to\Re(X,D)$$

المعرف بالشكل $\beta(g)=vg$ وذلك أياً كان $g\in\Re(X,B)$ .

$$\mu:\Re(X,A)\to\Re(X,D)$$

المعرف بالشكل $\mu(\varphi)=(vu)\varphi$ وذلك أياً كان $\varphi\in\Re(X,A)$ .

١ – لنفرض أن كلاً من $u,v$ مونومورفيزم. ولنبرهن أن $vu$ مونومورفيزم. حسب التعريف فإن كلاً من $\alpha,\beta$ متباين. لنبرهن على أن التطبيق $\mu$ متباين.

ليكن $\varphi_1,\varphi_2\in\Re(X,A)$ بحيث $\mu(\varphi_1)=\mu(\varphi_2)$ عندئذ $(vu)\varphi_1=(vu)\varphi_2$ ومنه $v(u\varphi_1)=v(u\varphi_2)$ أي أن $\beta(u\varphi_1)=\beta(u\varphi_2)$ ومنه $u\varphi_1=u\varphi_2$ أي أن $\alpha(\varphi_1)=\alpha(\varphi_2)$ وبالتالي $\varphi_1=\varphi_2$. ومنه التطبيق $\mu$ متباين أي أن المورفيزم $vu$ هو مونومورفيزم.

٢ – لنفرض أن المورفيزم $vu$ مونومورفيزم عندئذ التطبيق $\mu$ متباين. لنبرهن على أن المورفيزم $u$ مونومورفيزم يكفي البرهان على أن التطبيق $\alpha$ متباين.

ليكن $f_1,f_2\in\Re(X,A)$ بحيث $\alpha(f_1)=\alpha(f_2)$ ومنه $uf_1=uf_2$ وبالتالي $v(uf_1)=v(uf_2)$ أي أن $(vu)f_1=(vu)f_2$ وبالتالي $\mu(f_1)=\mu(f_2)$ وهكذا نجد أن $f_1=f_2$ ومنه فإن التطبيق $\alpha$ متباين.

بشكل مشابه نبرهن على (٣) و(٤). ه

**تعريف.**

لتكن $\Re$ فئة. نقول عن المورفيزم $u\in\Re(A,B)$ إنه ايزومورفيزم إذا وجد مورفيزم $v\in\Re(B,A)$ يحقق $vu=I_A, uv=I_B$ .

**تمهيدية ١٥-١-٢.**

لتكن $\mathfrak{R}$ فئة. عندئذ:

١ – إذا كان المورفيزم $u \in Mor(\mathfrak{R})$ ايزومورفيزم عندئذ $u$ مونومورفيزم وأيضا ايبومورفيزم.

٢ – تركيب ايزومرفيزمين هو ايزومورفيزم.

**البرهان.**

١ – ليكن $u \in \mathfrak{R}(A,B)$ ايزومورفيزم عندئذ يوجد $v \in \mathfrak{R}(B,A)$ بحيث $uv = I_B, vu = I_A$. أن المورفيزم $I_A$ مونومورفيزم لأنه أياً كان $X \in Ob(\mathfrak{R})$ فإن التطبيق

$$\alpha : \mathfrak{R}(X,A) \to \mathfrak{R}(X,A)$$

المعرف بالشكل $\alpha(f) = I_A.f$ وذلك أياً كان $f \in \mathfrak{R}(X,A)$ هو تطبيق متباين.
لأنه أياً كان $f_1, f_2 \in \mathfrak{R}(X,A)$ بحيث $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$ فإن

$$f_1 = I_A.f_1 = \alpha(f_1) = \alpha(f_2) = I_A.f_2 = f_2$$

ومنه فإن المورفيزم $vu = I_A$ مونومورفيزم وحسب التمهيدية (١٥-١-١) ينتج أن المورفيزم $u$ مونومورفيزم.

بشكل مشابه نجد أن $I_B$ ايبومورفيزم ومنه المورفيزم $uv = I_B$ ايبومورفيزم وحسب التمهيدية (١٥-١-١) فإن المورفيزم $u$ ايبومورفيزم.

٢ – ليكن $u \in \mathfrak{R}(A,B), v \in \mathfrak{R}(B,D)$ ايزومورفيزمين، ولنبرهن على أن $v.u \in \mathfrak{R}(A,D)$ ايزومورفيزم. بما أن $u$ ايزومورفيزم يوجد $u_1 \in \mathfrak{R}(B,A)$ بحيث $uu_1 = I_B, u_1u = I_A$. كذلك بما أن $v$ ايزومورفيزم يوجد $v_1 \in \mathfrak{R}(D,B)$ بحيث $vv_1 = I_D, v_1v = I_B$ ومنه $u_1.v_1 \in \mathfrak{R}(D,A)$ وأن

$$(u_1v_1)(vu) = u_1(v_1v)u = u_1(I_Bu) = u_1u = I_A$$

$$(vu)(u_1v_1) = v(uu_1)v_1 = (vI_A)v_1 = vv_1I_D$$

وهذا يبين لنا أن المورفيزم $vu$ ايزومورفيزم. ◦



## ١٥-٢. الدوال.

**تعريف.**

لتكن $\mathfrak{R},\mathfrak{I}$ فئتين. نقول إنه يوجد لدينا دالي $F$ من الفئة $\mathfrak{R}$ إلى الفئة $\mathfrak{I}$ إذا وجد لدينا:

١ – تطبيق $F : Ob(\mathfrak{R}) \to Ob(\mathfrak{I})$ بحيث $\forall A \in Ob(\mathfrak{R})$ فإن $F(A) \in Ob(\mathfrak{I})$.

٢ – تطبيق $F : \mathfrak{R}(A,B) \to \mathfrak{I}(F(A),F(B))$ وذلك $\forall A,B \in Ob(\mathfrak{R})$ بحيث $\forall f \in \mathfrak{R}(A,B)$ فإن $F(f) : F(A) \to F(B)$، أي أن $F(f) \in \mathfrak{I}(F(A),F(B))$ ويحقق

$$\forall A \in Ob(\mathfrak{R}); \quad F(I_A) = I_{F(A)}$$

$$\forall f,g \in Mor(\mathfrak{R}); \quad F(fg) = F(f)F(g)$$

نسمي الدالي $F$ في هذه الحالة دالياً مباشراً (موافق للتغير).

نسمي الدالي $F$ في هذه دالياً غير مباشر (مخالف للتغير) إذا كان

$$\forall f,g \in Mor(\mathfrak{R}); \quad F(fg) = F(g)F(f)$$

**تعريف.**

ليكن $F,G$ دالين مباشرين ( موافقين للتغير )من الفئة $\mathfrak{R}$ إلى الفئة $\mathfrak{I}$.

– نقول إنه لدينا مورفيزم دالي $f$ من الدالي $F$ إلى الدالي $G$ إذا تحقق الشرط التالي:
أياً كان $A \in Ob(\mathfrak{R})$ يوجد مورفيزم $f(A) : F(A) \to G(A)$ يحقق $\forall u \in \mathfrak{R}(A,B)$ يكون المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \downarrow & & \downarrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow[f(B)]{} & G(B) \end{array}$$

تبديلياً. أي أن $f(B)F(u) = G(u)f(A)$.

– نقول عن المورفيزم الدالي $f : F \to G$ إنه ايزومورفيزم دالي إذا تحقق $\forall A \in Ob(\mathfrak{R})$ فإن المورفيزم $f(A) : F(A) \to G(A)$ هو ايزومورفيزم.

**تعريف.**

ليكن $F,G$ دالين غير مباشرين ( مخالفين للتغير ) من الفئة $\Re$ إلى الفئة $\Im$.

- نقول أنه لدينا مورفيزم دالي $f$ من الدالي $F$ إلى الدالي $G$ إذا تحقق الشرط التالي:

أياً كان $A \in Ob(\Re)$ يوجد مورفيزم $f(A):F(A)\to G(A)$ يحقق $\forall u \in \Re(A,B)$ يكون المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u)\uparrow & & \uparrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow[f(B)]{} & G(B) \end{array}$$

تبديلي. أي أن $f(A)F(u)=G(u)f(B)$.

- نقول عن المورفيزم الدالي $f:F\to G$ إنه ايزومورفيزم دالي إذا تحقق $\forall A \in Ob(\Re)$ فإن المورفيزم $f(A):F(A)\to G(A)$ هو ايزومورفيزم.

**مبرهنة ١٥-٢-١.**

ليكن $F,G$ دالين مباشرين ( موافقين للتغير ) من الفئة $\Re$ إلى الفئة $\Im$. وليكن $f:F\to G$ مورفيزم دالي. إذا كان المورفيزم $f:F\to G$ ايزومورفيزم عندئذ يوجد مورفيزم دالي وحيد $g:G\to F$ يحقق $f.g=I_G, g.f=I_F$.

**البرهان.**

لنفرض أن المورفيزم $f:F\to G$ ايزومورفيزم دالي عندئذ $\forall A \in Ob(\Re)$ فإن المورفيزم $f(A):F(A)\to G(A)$ ايزومورفيزم وأنه $\forall u \in \Re(A,B)$ فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u)\downarrow & & \downarrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow[f(B)]{} & G(B) \end{array}$$

تبديلي. أي أن $f(B)F(u)=G(u)f(A)$.



بما أن المورفيزم $f(A)$ ايزومورفيزم فإنه يوجد مورفيزم $g(A):G(A)\to F(A)$ يحقق $f(A).g(A)=I_{G(A)}, g(A).f(A)=I_{F(A)}$. لنضع $g:G\to F$ كي يكون $g$ مورفيزماً دالياً يكفي إثبات أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{g(A)} & F(A) \\ G(u)\downarrow & & \downarrow F(u) \\ G(B) & \xrightarrow[g(B)]{} & F(B) \end{array}$$

تبديلي وذلك $\forall A \in Ob(\Re)$ و $\forall u \in \Re(A,B)$. أي أن $g(B)G(u)=F(u)g(A)$.

لدينا

$$\begin{array}{ccccc} G(A) & \xrightarrow{g(A)} & F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ G(u)\downarrow & & \downarrow F(u) & & \downarrow G(u) \\ G(B) & \xrightarrow[g(B)]{} & F(B) & \xrightarrow[f(B)]{} & G(B) \end{array}$$

ومنه

$$G(u)=G(u).I_{G(A)}=G(u).f(A).g(A)=f(B).F(u).g(A).g(B).G(u)=$$
$$=g(B).f(B).F(u).g(A)=I_{F(B)}.F(u).g(A)=F(u)g(A)$$

وهذا يبين لنا أن $g:G\to F$ مورفيزم دالي.

لنبرهن على أن $f.g=I_G, g.f=I_F$. ليكن $A\in Ob(\Re)$ عندئذ $f(A):F(A)\to G(A)$ و $g(A):G(A)\to F(A)$ كما أن $f(A).g(A)=I_{G(A)}$ ومنه $f.g=I_G$. بشكل مشابه نجد أن $g.f=I_F$.

برهان الوحدانية. ليكن $\xi:G\to F$ مورفيزم دالي آخر يحقق $f.\xi=I_G, \xi.f=I_F$ عندئذ $\forall A\in Ob(\Re)$ فإن $\xi(A).f(A)=I_{F(A)}$ وأن $f(A).\xi(A)=I_{G(A)}$ ومنه

$$\xi(A)=I_{F(A)}.\xi(A)=g(A).f(A).\xi(A)=g(A).I_{G(A)}=g(A)$$ ◊

**ملاحظة.**

المبرهنة السابقة صحيحة لأجل الدوال غير المباشرة ( المخالفة للتغير ).

**تمهيدية ١٥-٢-٢.**

لتكن $\mathfrak{R}$ فئة ولتكن $Set`s$ فئة المجموعات. عندئذ أياً كان $X \in Ob(\mathfrak{R})$:

١ - يوجد دالي مباشر ( موافق للتغير ) $h_X : \mathfrak{R} \to Set`s$.

٢ - يوجد دالي غير مباشر ( مخالف للتغير ) $\bar{h}_X : \mathfrak{R} \to Set`s$.

**البرهان.**

١ - لنبرهن على أن $h_X : \mathfrak{R} \to Set`s$ دالي مباشر. لدينا

$$\forall Y \in Ob(\mathfrak{R}); \quad h_X(Y) = \mathfrak{R}(X,Y) \in Ob(Set`s)$$

واضح أن $h_X$ تطبيق. ليكن $u \in \mathfrak{R}(Y,Y')$ ولنعرف العلاقة

$$h_X(u) : h_X(Y) = \mathfrak{R}(X,Y) \to h_X(Y') = \mathfrak{R}(X,Y')$$

بالشكل $\forall v \in \mathfrak{R}(X,Y)$ فإن $h_X(u).v = u.v$. فنجد أن $h_X(u)$ تطبيق وأنه $\forall Y \in Ob(\mathfrak{R})$ فإن

$$h_X(I_Y) : h_X(Y) = \mathfrak{R}(X,Y) \to h_X(Y) = \mathfrak{R}(X,Y)$$

ومنه $h_X(I_Y)v = I_Y.v = v$ وبالتالي $h_X(I_Y) = I_{h_X(Y)} = I_{\mathfrak{R}(X,Y)}$.

كما أنه $\forall f,g \in Mor(\mathfrak{R})$ بحيث $f : Y \to Y', g : Y' \to Y''$ فإن

$$h_X(g.f) = h_X(g).h_Y(f)$$

$$h_X(g.f) : h_X(Y) = \mathfrak{R}(X,Y) \to h_X(Y'') = \mathfrak{R}(X,Y'')$$

$$h_X(g.f).(v) = (g.f).v = g.(f.v) = h_X(g)(f.v) = h_X(g).(h_X(f).v) =$$

$$= (h_X(g).h_X(f))(v)$$

ومنه $h_X(g.f) = h_X(g).h_X(f)$ وهذا يبين لنا أن الدالي $h_X$ هو دالي موافق للتغير.

٢ - لنبرهن على أن $\bar{h}_X : \mathfrak{R} \to Set`s$ دالي غير مباشر.

لدينا

$$\bar{h}_X : Ob(\mathfrak{R}) \to Ob(Set`s)$$

$$\forall Y \in Ob(\mathfrak{R}); \quad \bar{h}_X(Y) = \mathfrak{R}(X,Y) \in Ob(Set`s)$$

واضح أن $\bar{h}_X$ تطبيق. ليكن $u \in \mathfrak{R}(Y,Y')$ ولنعرف العلاقة

$$\bar{h}_X(u) : \bar{h}_X(Y') = \mathfrak{R}(Y',X) \to \bar{h}_X(Y) = \mathfrak{R}(Y,X)$$

بالشكل $\forall v \in \mathfrak{R}(Y',X)$ فإن $\bar{h}_X(u).v = v.u$. فنجد أن $\bar{h}_X(u)$ تطبيق وأنه $\forall Y \in Ob(\mathfrak{R})$ فإن

$$\bar{h}_X(I_Y) : \bar{h}_X(Y) = \mathfrak{R}(Y,X) \to \bar{h}_X(Y) = \mathfrak{R}(Y,X)$$

ومنه $\bar{h}_X(I_Y)v = v.I_Y = v$ وبالتالي $\bar{h}_X(I_Y) = I_{\bar{h}_X(Y)} = I_{\mathfrak{R}(Y,X)}$.

كما أنه $\forall f,g \in Mor(\mathfrak{R})$ بحيث $f : Y \to Y', g : Y' \to Y''$ فإن

$$\bar{h}_X(g.f) : \bar{h}_X(Y'') = \mathfrak{R}(Y'',X) \to \bar{h}_X(Y) = \mathfrak{R}(Y,X)$$

$$\bar{h}_X(g.f).(v) = v.(g.f) = (v.g).f = \bar{h}_X(f)(v.g) = \bar{h}_X(f).(\bar{h}_X(g)v) =$$

$$= (\bar{h}_X(f).\bar{h}_X(g))(v)$$

ومنه $\bar{h}_X(g.f) = \bar{h}_X(f).\bar{h}_X(g)$ وهذا يبين لنا أن الدالي $\bar{h}_X$ هو دالي موافق للتغيير. ٥

**تمهيد.**

لتكن $\mathfrak{R}$ فئة ولتكن $Set`s$ فئة المجموعات. و $F : \mathfrak{R} \to Set`s$ دالي موافق للتغير من الفئة $\mathfrak{R}$ إلى فئة المجموعات $Set`s$ وليكن $X \in Ob(\mathfrak{R})$. وجدنا في التمهيدية (١٥-٢-٢) أنه يوجد دالي موافق للتغير $h_X : \mathfrak{R} \to Set`s$. ليكن $Hom(h_X,F)$ صف المورفيزمات الدالية من $h_X$ إلى $F$.

**مبرهنة ١٥-٢-٣.**

ليكن $Hom(h_X,F)$ صف المورفيزمات الدالية من $h_X$ إلى $F$. يوجد تطبيق

$$\alpha : Hom(h_X,F) \longrightarrow F(X)$$

متباين وغامر.

**البرهان.**

ليكن $f \in Hom(h_X, F)$ مورفيزماً دالياً $f : h_X \longrightarrow F$ عندئذ أياً كان $Y \in Ob(\Re)$ يوجد مورفيزم $f(Y) : h_X(Y) \longrightarrow F(Y)$ يحقق $\forall u \in \Re(Y,Y')$ فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & h_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) & \\ h_X(u) & \downarrow & & \downarrow & F(u) \\ & h_X(Y') & \xrightarrow[f(Y')]{} & F(Y') & \end{array}$$

تبديلي. أي أن $F(u).f(Y) = f(Y').h_X(u)$. ومن أجل $X = Y$ فإن $f(X) : h_X(X) \longrightarrow F(X)$ مورفيزم وأن $f(X) : \Re(X,X) \longrightarrow F(X)$.

لنعرف التطبيق $\alpha : Hom(h_X, F) \longrightarrow F(X)$ بالشكل $\forall f \in Hom(h_X, F)$ فإن

$$\alpha(f) = f(X)(I_X)$$

ولنعرف التطبيق $\beta : F(X) \longrightarrow Hom(h_X, F)$ بالشكل $\forall \xi \in F(X)$ فإن $\beta(\xi) : h_X \to F$ بحيث $\forall Y \in Ob(\Re)$ فإن

$$\beta(\xi)(Y) : h_X(Y) \to F(Y)$$

أي أن $\beta(\xi)(Y) : \Re(X,Y) \to F(Y)$ وأنه $\forall u \in \Re(X,Y)$ فإن $F(u) : F(X) \to F(Y)$ وبالتالي

$$\beta(\xi)(Y)(u) = F(u)(\xi)$$

كي نبرهن أنه يوجد لدينا مورفيزم دالي $\beta(\xi) : h_X \to F$ يكفي أن نبرهن أنه $\forall v \in \Re(Y,Y')$ فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & h_X(Y) & \xrightarrow{\beta(\xi)(Y)} & F(Y) & \\ h_X(v) & \downarrow & & \downarrow & F(v) \\ & h_X(Y') & \xrightarrow[\beta(\xi)(Y')]{} & F(Y') & \end{array}$$

أي أن $F(v)\beta(\xi)(Y) = \beta(\xi)(Y')h_X(v)$ ومنه $\forall w \in h_X(Y) = \Re(X,Y)$ فإن



$$(F(v)\beta(\xi)(Y))(w) = F(v)\beta(\xi)(Y)(w) = F(v)F(w)(\xi) = F(vw)(\xi)$$

$$(\beta(\xi)(Y')h_X(v))(w) = \beta(\xi)(Y')h_X(v)(w) = \beta(\xi)(Y')(vw) = F(vw)(\xi)$$

ومنه $F(v)\beta(\xi)(Y) = \beta(\xi)(Y')h_X(v)$.

لنبرهن على أن $\alpha\beta = I_{F(X)}$ وأن $\beta\alpha = I_{Hom(h_X,F)}$.

– لنبرهن على أنه $\forall f \in Hom(h_X,F)$ فإن $\beta(\alpha(f)) = f$. لدينا $\forall Y \in Ob(\Re)$ فإنه لأجل كل $u \in h_X(Y)$

$$(\beta(\alpha(f))(Y))(u) = F(u)(\alpha(f)) = F(u)(f(X)I_X) = (F(u)f(X))(I_X)$$

وبما أن $f$ مورفيزم دالي فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & h_X(X) & \xrightarrow{f(X)} & F(X) & \\ h_X(u) & \downarrow & & \downarrow & F(u) \\ & h_X(Y) & \xrightarrow[f(Y)]{} & F(Y) & \end{array}$$

أي أن $F(u)f(X) = f(Y)h_X(u)$ ومنه

$$(\beta(\alpha(f))(Y))(u) = (f(Y)h_X(u))(I_X) = f(Y)h_X(u)(I_X) =$$
$$= f(Y)(I_X u) = f(Y)(u)$$

ومنه $\beta(\alpha(f)) = f$ وذلك $\forall f \in Hom(h_X,F)$. كذلك $\alpha(\beta(\xi)) = \xi$ وذلك $\forall \xi \in F(X)$ لأن

$$\alpha(\beta(\xi)) = (\beta(\xi)(X))(I_X) = F(I_X)(\xi) = I_{F(X)}(\xi) = \xi$$

أي أن $\alpha\beta = I_{F(X)}$. ∘

**مبرهنة ١٥-٢-٤.**

لتكن $\Re$ فئة، ولتكن $Set`s$ فئة المجموعات. و $h_X, h_{X'} : \Re \to Set`s$ الداليان الموافقان للتغير. من أجل أي مورفيزم دالي $f : h_X \longrightarrow h_{X'}$ يوجد مورفيزم وحيد $\mu \in \Re(X',X)$ يحقق $f(Y)(u) = u.\mu$ وذلك أياً كان $Y \in Ob(\Re)$

و أياً كان $u \in \Re(X,Y)$. بالاضافة لذلك، السورفيزم الدالي $f$ يكـون ايزومـورفيزم عندما وفقط عندما المورفيزم $\mu$ ايزمورفيزم.

**البرهـان.**

ليكن $f : h_X \longrightarrow h_{X'}$ مورفيزم دالي. وحسب المبرهنة (١٥-٢-٣) يوجد تطبيق

$$\alpha : Hom(h_X, h_{X'}) \longrightarrow h_{X'}(X)$$

أي $\alpha : Hom(h_X, h_{X'}) \longrightarrow \Re(X,X')$. لنضـع $\alpha(f) = \mu$ فنجـد أن $\mu : X \longrightarrow X'$ مورفيزم للفئة $\Re$. كذلك حسب المبرهنة (١٥-٢-٣) يوجد

$$\beta : h_{X'}(X) \longrightarrow Hom(h_X, h_{X'})$$

أي $\beta : \Re(X,X') \longrightarrow Hom(h_X, h_{X'})$ بحيث $\beta\alpha = I_{Hom(h_X,h_{X'})}$ ومنه $\beta\alpha(f) = \beta(\mu) = f$ وبالتالي $\forall Y \in Ob(\Re)$ فإن

$$f(Y) = \beta(\mu)(Y) : h_X(Y) \longrightarrow h_{X'}(Y)$$

أي أن $f(Y) : \Re(X,Y) \longrightarrow \Re(X',Y)$ ومنه أياً كان $u \in \Re(X,Y)$ فإن

$$f(Y)(u) = (\beta(\mu)(Y))(u) = h_{X'}(u)(\mu) = u\mu$$

كما أن المورفيزم $\mu$ وحيد، لأنه إذا وجد مـورفيزم آخـر $\psi : X \to X'$ بحيث $f(Y)(u) = u.\psi$ وذلك $\forall Y \in Ob(\Re)$ و أياً كان $u \in \Re(X,Y)$. عندئذ مـن أجـل $X = Y$ ومن أجل $\psi = I_X$ نجد أن

$$f(X)(I_X) = I_X\mu = \mu; \quad f(X)(I_X) = I_X\psi = \psi$$

مما سبق نجد أن $\psi = \mu$.

**لزوم الشرط.** لنفرض أن المورفيزم الدالي $f : h_X \longrightarrow h_{X'}$ ايزومـورفيزم عندئـذ يوجد مورفيزم دالي $g : h_{X'} \to h_X$ بحيث $fg = I_{h_{X'}}, gf = I_{h_X}$ وحسـب المبرهنـة (١٥-٢-٣) يوجد

$$\alpha : Hom(h_{X'}, h_X) \longrightarrow h_X(X') = \Re(X,X')$$

لنفرض أن $\alpha(g) = \mu'$ فنجد أن $\mu' : X \to X'$ مورفيزم للفئة $\Re$. وحسب ما تـم إثباتـه أعـلاه فـإن $g(Y)(u) = u\mu'$ وذلـك أيـاً كـان $Y \in Ob(\Re)$ و أيـاً



كـان $u \in \Re(X',Y)$. وبمـا أن $gf = I_{h_X}$ وحسـب المبرهنـة (١٥-٢-٣) يوجـد $\alpha : Hom(h_X, h_X) \longrightarrow h_X(X)$ أي أن $\alpha : Hom(h_X,h_X) \longrightarrow \Re(X,X)$ و أن

$$\alpha(gf) = \alpha(I_{h_X}) = I_{h_X}(X)(I_X) = I_{\Re(X',X)}(I_X) = I_X$$

$$I_X = \alpha(gf) = (gf)(X)(I_X) = (g(X)f(X))(I_X) = g(X)(f(X)(I_X)) =$$

$$= g(X)(I_X\mu) = g(X)(\mu) = \mu\mu'$$

بهذا الشكل نجد أن $\mu\mu' = I_X$. لنبرهن على أن $\mu'\mu = I_{X'}$. بما أن $fg = I_{h_{X'}}$ وحسب المبرهنـة (١٥-٢-٣) يوجـد $\alpha : Hom(h_{X'},h_{X'}) \longrightarrow \Re(X',X')$ بحيث $\alpha(fg) = I_{X'}$ ومنه

$$I_{X'} = \alpha(fg) = (fg)(X')(I_{X'}) = (f(X')g(X'))(I_{X'}) = f(X')(g(X')(I_{X'})) =$$

$$= f(X')(\mu') = \mu'\mu$$

أي أن $\mu'\mu = I_{X'}$. مما سبق نجـد أن المـورفيزم $f : X' \to X$ للفئة $\Re$ هـو ايزومورفيزم للفئة $\Re$.

**كفاية الشرط.** لنفرض أن المورفيزم $\mu : X' \to X$ ايزمومورفيزم للفئة $\Re$. عندئـذ يوجد مـورفيزم $\mu' : X \to X'$ للفئـة $\Re$ يحقـق $\mu\mu' = I_X, \mu'\mu = I_{X'}$. لنعـرف المورفيزم الدالي $f' : h_{X'} \to h_X$ وحسب المبرهنة (١٥-٢-٣) يوجد

$$\alpha : Hom(h_{X'},h_X) \longrightarrow h_X(X')$$

$$\beta : h_X(X') = \Re(X,X') \longrightarrow Hom(h_{X'},h_X)$$

لنضـع $f' = \beta(\mu')$ فنجـد أن $f' : h_{X'} \to h_X$ مـورفيزم دالـي. وأنـه أيـاً كان $Y \in Ob(\Re)$ فإن $f'(Y) = \beta(\mu')(Y)$ حيث

$$f'(Y) : \Re(X',Y) \to \Re(X,Y)$$

وأنه $\forall u \in \Re(X',Y)$ فإن

$$f'(Y)(u) = (\beta(\mu')(Y))(u) = h_X(u)\mu'$$

$$f'(Y)(u) = u\mu'$$

لنبرهن أن $ff' = I_{h_X}$. أياً كان $Y \in Ob(\Re)$ فإن $ff'(Y) = f(Y)f'(Y)$ و أياً كان $u \in \Re(X',Y)$ فإن

$$(f(Y)f'(Y))(u) = f(Y)(f'(Y)(u)) = f(Y)(u\mu') = (u\mu')\mu =$$
$$= u(\mu'\mu) = uI_{X'} = u$$

ومنه $f(Y)f'(Y) = I_{\Re(X',Y)}$ . كذلك أياً كان $v \in \Re(X,Y)$ فإن

$$(f'(Y)f(Y))(v) = f'(Y)(f(Y)(v)) = f'(Y)(v\mu) = (u\mu)\mu' =$$
$$= v(\mu\mu') = vI_X = v$$

ومنه $f'(Y)f(Y) = I_{\Re(X,Y)}$ . مما سبق نجد أن المورفيزم الدالي $f$ ايزومورفيزم. ◦

## ١٥-٣. الجداء الديكارتي للفئات.

لتكن $\Re_1,\Re_2$ فئتان. ولنضع $\Re=\Re_1\times\Re_2$ التي تتألف من:

١ – الصف $Ob(\Re)$ الذي يتألف من العناصر على الشكل $A=(A_1,A_2)$ حيث $A_1\in Ob(\Re_1), A_2\in Ob(\Re_2)$.

٢ – صف المورفيزمات $Mor(\Re)$ ويتألف من العناصر $u\in Mor(\Re)$ حيث $u\in(A,B)$ وأن $A\in Ob(\Re_1),B\in Ob(\Re_2)$ كما أن $u=(u_1,u_2)$ وأن $u_1:A_1\to B_1$ $u_2:A_2\to B_2$.

كما أنه يوجد تطبيق $\Re\times\Re\longrightarrow\Re$ يحقق $\forall A,B,D\in Ob(\Re)$ وأن $A=(A_1,A_2),B=(B_1,B_2),D=(D_1,D_2)$ حيث $A_1,B_1,D_1\in Ob(\Re_1)$ وأن $A_2,B_2,D_2\in Ob(\Re_2)$ وأنه $\forall u\in\Re(A,B),\forall v\in\Re(B,D)$ فإن $u=(u_1,u_2)$ وأن $v=(v_1,v_2)$ حيث

$$u_1\in\Re_1(A_1,B_1),u_2\in\Re_2(A_2,B_2),v_1\in\Re_1(B_1,D_1),v_2\in\Re_2(B_2,D_2)$$

وأن

$$vu=(v_1,v_2).(u_1,u_2)=(v_1u_1,v_2u_2)\in\Re(A,B)$$

**تمهيدية ١٥-٣-١.**

لتكن $\Re_1,\Re_2$ فئتين وليكن $F:\Re_1\longrightarrow\Re_2$ و $G:\Re_2\longrightarrow\Re_1$ دوالاً موافقة للتغير ولنأخذ الفئة $\Re=\Re_1^{op}\times\Re_2$. عندئذ توجد دوال موافق للتغير هي



$$Hom_{\Re_1}(G):\Re=\Re_1^{op}\times\Re_2\longrightarrow Set`s$$
$$Hom_{\Re_2}(F):\Re=\Re_1^{op}\times\Re_2\longrightarrow Set`s$$

**البرهان.**

١ – لندرس وجود الدالي $Hom_{\Re_1}(G):\Re=\Re_1^{op}\times\Re_2\longrightarrow Set`s$.

لنعرف $Hom_{\Re_1}(G)$ بالشكل

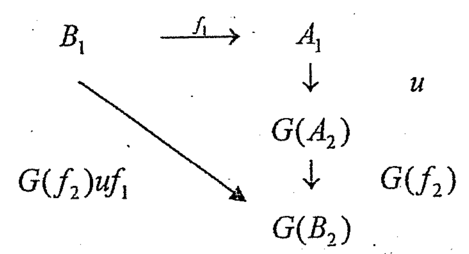
$\forall A\in Ob(\Re); Hom_{\Re_1}(G)(A)=\Re_1(A_1,G(A_2))$.

حيث $A=(A_1,A_2)$ وأن $A_1\in Ob(\Re_1),A_2\in Ob(\Re_2)$. وأنه $\forall f\in\Re(A,B)$ فإن $f=(f_1,f_2)$ حيث $A,B\in Ob(\Re)$ فإن $A=(A_1,A_2),B=(B_1,B_2)$ وأن $A_1,B_1\in Ob(\Re_1)$، $A_2,B_2\in Ob(\Re_2)$ وأن $f_1\in\Re_1^{op}(A_1,B_1)$ و $f_2\in\Re_2(A_2,B_2)$. كما أن

$$Hom_{\Re_1}(G)(f):Hom_{\Re_1}(G)(A)\longrightarrow Hom_{\Re_1}(G)(B)$$
$$Hom_{\Re_1}(G)(f):\Re_1(A_1,G(A_2))\longrightarrow\Re_1(B_1,G(B_2))$$

وبالتالي $\forall u\in\Re_1(A_1,G(A_2))$ فإن

$$Hom_{\Re_1}(G)(f)(u)=G(f_2)uf_1$$




كما أنه أياً كان $A\in Ob(\Re)$ فإن $A=(A_1,A_2)$ وأن $I_A=(I_{A_1},I_{A_2})$ ومنه

$$Hom_{\Re_1}(G)(I_A)(u)=G(I_{A_2})uI_{A_1}=(I_{G(A_2)})I_{A_1}=uI_{A_1}=u$$

أي أن $Hom_{\Re_1}(G)(I_A)=I_{Hom_{\Re_1}(G)(A)}$ . كما أنه أياً كان $f,g\in Mor(\Re)$ بحيث $g:B\to D,g:A\to D$ حيث $A,B,D\in Ob(\Re)$ فإن $fg\in\Re(A,D)$ ومنه

$$Hom_{\Re_1}(G)(fg):Hom_{\Re_1}(G)(A)\longrightarrow Hom_{\Re_1}(G)(D)$$

$$Hom_{\Re_1}(G)(fg):\Re_1(A_1,G(A_2))\longrightarrow\Re_1(D_1,G(D_2))$$

وبالتالي أيـاً كـان $u:A_1\to G(A_2)$ وبمـا أن $f=(f_1,f_2),g=(g_1,g_2)$ فـإن $fg=(g_1f_1,f_2g_2)$ ومنه

$$(Hom_{\Re_1}(G)(fg))u=G(f_2g_2)u(g_1f_1)=G(f_2)G(g_2)ug_1f_1=$$
$$=G(f_2)Hom_{\Re_1}(G)f(u)g_1=(Hom_{\Re_1}(G)(f))(Hom_{\Re_1}(G)(g))(u)$$

مما سبق نجد أن

$$Hom_{\Re_1}(G)(fg)=Hom_{\Re_1}(G)(f).Hom_{\Re_1}(G)(g)$$

وهذا يبين لنا أن $Hom_{\Re_1}(G)$ دالي موافق للتغير.

بشكل مشابه نبرهن على أن $Hom_{\Re_2}(F)$ دالي موافق للتغير. ◊

## ١٥-٤. تكافؤ الفئات.

**تمهيدية ١٥-٤-١.**

لتكن $\Re_1,\Re_2,\Re_3$ ثلاث فئات وليكن $F:\Re_1\longrightarrow\Re_2$ و $G:\Re_2\longrightarrow\Re_3$ دوالاً موافقة للتغير. عندئذ $G\circ F:\Re_1\longrightarrow\Re_3$ هو دالي موافق للتغير.

**البرهان.**

لـدينا $G\circ F:\Re_1\longrightarrow\Re_3$ بحيـث أيـاً كـان $A\in Ob(\Re_1)$ فـإن $(G\circ F)(A)=G(F(A))\in\Re_3$. لـيكن $A,B\in Ob(\Re_1)$ ولـيكن $f\in\Re_1(A,B)$ عندئذ $(G\circ F)(f)=F(A)\longrightarrow F(B)$ وبالتالي

$$(G\circ F)(f):(G\circ F)(A)\longrightarrow(G\circ F)(B)$$

أي أن $(G\circ F)(f)\in\Re_3(G\circ F(A),G\circ F(B))$ ويحقق: $\forall A\in Ob(\Re_1)$ فإن

$$(G\circ F)(I_A)=G(F(I_A))=G(I_{F(A)})=I_{(G\circ F)(A)}$$

كذلك $\forall f,g\in Mor(\Re_1)$ فإن

$$(G\circ F)(fg)=G(F(fg))=G(F(f),F(g))=G(F(f)).G(F(g))=$$
$$=(G\circ F)(f).(G\circ F)(g)$$



وهذا يبين لنا أن $G\circ F:\Re_1\longrightarrow\Re_3$ هو دالي موافق للتغير. ◊

**تمهيدية ١٥-٤-٢.**

لـتكن $\Re_1,\Re_2,\Re_3$ ثـلاث فئـات ولـيكن $F,G:\Re_1\longrightarrow\Re_2$ و $H:\Re_2\longrightarrow\Re_3$ دوالاً موافقة للتغيير. وليكن $\varphi:F\longrightarrow G$ مـورفيزم دالـي. عندئـذ يوجـد مـورفيزم دالـي $H\varphi:H\circ F\longrightarrow H\circ G$ معطـى بالشـكل $\forall A\in Ob(\Re_1)$ فإن

$$(H\varphi)(A)=H(\varphi(A))$$

**البرهـان.**

لدينا حسب التمهيديـة (١٥-٤-١) أن $H\circ F,H\circ G:\Re_1\longrightarrow\Re_3$ هـي دوال موافقة للتغيير وأن $H\varphi:H\circ F\longrightarrow H\circ G$ معرف بالشكل $\forall A\in Ob(\Re_1)$ فإن

$$(H\varphi)(A):(H\circ F)(A)\longrightarrow(H\circ G)(A)$$

حيث $\varphi(A):F(A)\to G(A)$. لنبرهن أنـه $\forall A,B\in Ob(\Re_1)$ و $\forall u\in\Re_1(A,B)$ فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & (H\circ F)(A) & \xrightarrow{H\varphi(A)} & (H\circ G)(A) & \\ H\circ F(u) & \downarrow & & \downarrow & H\circ G(u) \\ & (H\circ F)(B) & \xrightarrow[H\varphi(B)]{} & (H\circ G)(B) & \end{array}$$

تبديلي. أي أن $(H\circ G)(u).H\varphi(A)=H\varphi(B).(H\circ F)(u)$.

بما أن $\varphi:F\longrightarrow G$ مورفيزم دالي فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & F(A) & \xrightarrow{\varphi(A)} & G(A) & \\ F(u) & \downarrow & & \downarrow & G(u) \\ & F(B) & \xrightarrow[\varphi(B)]{} & G(B) & \end{array}$$

تبديلي. أي أن $G(u).\varphi(A)=\varphi(B).F(u)$ ومنه

$$(H\circ G)(u).H\varphi(A)=H(G(u)).H(\varphi(A))=H(G(u).\varphi(A))=$$

$$= H(\varphi(B).F(u)) = H(\varphi(B)).H(F(u)) = (H\varphi)(B)(H\circ F)(u)$$

مما سبق نجد أن $H\varphi : H\circ F \longrightarrow H\circ G$ مورفيزم دالي. ∘

**تمهيدية ١٥-٤-٣.**

لتكن $\Re_1,\Re_2,\Re_3$ ثلاث فئات وليكن $F_1,F_2 : \Re_2 \longrightarrow \Re_3$ و $F_3 : \Re_1 \longrightarrow \Re_2$ دوالاً موافقة للتغيير. وليكن $\psi : F_1 \longrightarrow F_2$ مورفيزم دالي. عندئذ يوجد مورفيزم دالي. عندئذ

١ – كل من $F_1\circ F_3, F_2\circ F_3 : \Re_1 \longrightarrow \Re_3$ دوال موافقة للتغير.

٢ – يوجد مورفيزم دالي $\psi F_3 : F_1\circ F_3 \longrightarrow F_2\circ F_3$ معرف بالشكل $\forall A\in Ob(\Re_1)$ فإن $(\psi F_3)(A) = \psi(F_3(A))$.

**البرهان.**

١ – ينتج مباشرة من التمهيدية (١٥-٤-١).

٢ – حسب (١) فإن كلاً من $F_1\circ F_3, F_2\circ F_3 : \Re_1 \longrightarrow \Re_3$ دوال موافقة للتغيير. وأن $\psi F_3 : F_1\circ F_3 \longrightarrow F_2\circ F_3$ معرف بالشكل $\forall A\in Ob(\Re_1)$ فإن

$$\psi F_3(A) : F_1\circ F_3(A) \longrightarrow F_2\circ F_3(A)$$

كما أنه $\forall A,B\in Ob(\Re_1)$ و $\forall u\in \Re_1(A,B)$ أي $u : A\to B$ عندئذ وأن $F_3(A),F_3(B)\in Ob(\Re_2)$

$$F_3(u) : F_3(A) \longrightarrow F_3(B)$$

أي أن $F_3(u)\in Mor(\Re_2)$ وأن $F_3(u)\in \Re_2(F_3(A),F_3(B))$ وبما أن $\psi : F_1 \to F_2$ مورفيزم دالي فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & F_1(F_3(A)) & \xrightarrow{\psi(F_3(A))} & F_2(F_3(A)) & \\ F_1(F_3(u)) & \downarrow & & \downarrow & F_2(F_3(u)) \\ & F_1(F_3(B)) & \xrightarrow[\psi(F_3(B))]{} & F_2(F_3(B)) & \end{array}$$

تبديلي، أي أن $F_2(F_3(u)).\psi(F_3(A)) = \psi(F_3(B)).F_1(F_3(u))$ وبالتالي فإن



$$(F_1\circ F_3)(u)(\psi F_3)(A) = (\psi F_3)(B).(F_1\circ F_3)(u)$$

وهذا يبين لنا أن $\psi F_3$ مورفيزم دالي. ∘

**تعريف.**

لتكن $\Re_1,\Re_2$ فئتين وليكن $F : \Re_1 \longrightarrow \Re_2$ دالي موافق للتغيير. نقول عن الدالي $F$ إنه تكافؤ بين الفئتين $\Re_1,\Re_2$ إذا وجد دالي موافق للتغيير $G : \Re_2 \longrightarrow \Re_1$ وايزومورفيزمات دالية $\psi : I_{\Re_1} \longrightarrow FG, \varphi : I_{\Re_1} \longrightarrow GF$ تحقق $F\varphi = \psi F$.

**مبرهنة ١٥-٤-٤.**

لتكن $\Re_1,\Re_2$ فئتين وليكن $F : \Re_1 \longrightarrow \Re_2$ دالياً موافقاً للتغيير. إذا كان الدالي $F$ تكافؤاً بين الفئتين $\Re_1,\Re_2$ فإنه:

١ – $\forall A,B\in Ob(\Re_1)$ فإن التطبيق

$$F(A,B) : \Re_1(A,B) \longrightarrow \Re_2(F(A),F(B))$$

متباين وغامر.

٢ – $\forall M\in Ob(\Re_2)$ يوجد $N\in Ob(\Re_1)$ بحيث $F(N)\approx M$.

**البرهان.**

١ – بما أن $F : \Re_1 \longrightarrow \Re_2$ تكافؤ فإنه يوجد $G : \Re_2 \longrightarrow \Re_1$ ومنه أياً كان $A\in Ob(\Re_1)$ فإن $F(A)\in Ob(\Re_2)$ ومنه $GF(A)\in Ob(\Re_1)$. ليكن $u,v\in \Re_1(A,B)$ بحيث $F(u)=F(v)$ وبما أن $\varphi : I_{\Re_1} \to GF$ ايزومورفيزم عندئذ أياً كان $A\in Ob(\Re_1)$ فإن $\varphi(A) : A\to GF(A)$ ايزومورفيزم، أي أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & A & \xrightarrow{u} & B & \\ \varphi(A) & \downarrow & & \downarrow & \varphi(B) \\ & GF(A) & \xrightarrow[GF(u)]{} & GF(B) & \end{array}$$

تبديلي، أي أن $\varphi(B).u = GF(u).\varphi(A)$ . وبما أن $\varphi(A)$ ايزومورفيزم يوجد $\varphi(A)^{-1}: GF(A) \to A$ بحيث $\varphi(A)^{-1}.\varphi(A) = I_A$ وأن $\varphi(A).\varphi(A)^{-1} = I_{GF(A)}$ .
من جهة أخرى بما أن $F(u) = F(v)$ فإن $GF(u) = GF(v)$ ومنه $u = \varphi(B)^{-1}.GF(u).\varphi(A)$ . كذلك $v \in \Re_1(A,B)$ فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & A & \xrightarrow{u} & B & \\ \varphi(A) & \downarrow & & \downarrow & \varphi(B) \\ & GF(A) & \xrightarrow[GF(u)]{} & GF(B) & \end{array}$$

تبديلي، أي أن $\varphi(B).v = GF(v).\varphi(A)$ ومنه $v = \varphi(B)^{-1}.GF(v).\varphi(A)$ . مما سبق نجد أن $u = v$ . وهذا يبين لنا أن التطبيق $F(A,B)$ متباين. لنبرهن على أنه غامر، ليكن $v: F(A) \to F(B)$ عندئذ $G(v): GF(A) \to GF(B)$ لنضع

$$\begin{array}{ccccc} & A & --\varphi_*--> & B & \\ \varphi(A) & \downarrow & & \downarrow & \varphi(B) \\ & GF(A) & \xrightarrow[G(v)]{} & GF(B) & \end{array}$$

حيث $\varphi_*(G(v)) = \varphi(B)^{-1}.G(v).\varphi(A)$ فنجد أن $\varphi_*(G(v)) \in \Re_1(A,B)$ عندئذ يكون

$$F(\varphi_*(G(v))) = F(\varphi(B)^{-1}.G(v).\varphi(A)) = F(\varphi(B)^{-1})F(.G(v))F(.\varphi(A))) =$$
$$= F(\varphi(B)^{-1}).(FG)(v).(F\varphi)(A) = F(\varphi(B)^{-1}).(FG)(v).(\psi F)(A)$$

وبما أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & F(A) & \xrightarrow{v} & F(B) & \\ \psi(F(A)) & \downarrow & & \downarrow & \psi(F(B)) \\ & (FG)(F(A)) & \xrightarrow[(FG)(v)]{} & (FG)(F(B)) & \end{array}$$

تبديلي فإن $(\psi F)(B)v = (FG)(v).(\psi F)(A)$ ومنه

$$F(\varphi_*(G(v)) = F(\varphi(B)^{-1})(\psi F)(B).v = F(\varphi(B)^{-1})\psi(F(B))v =$$
$$= F(\varphi(B)^{-1}).F(\varphi(B))v = F(\varphi(B)^{-1}.\varphi(B))v = F(I_B)v = I_{F(B)}v = v$$



٢ – ليكن $M \in Ob(\Re_2)$ عندئذ $G(M) \in Ob(\Re_1)$ ومنه $F(G(M)) \in Ob(\Re_2)$ وأن $\psi(M) = (FG)(M)$ ومنه $F(G(M)) \approx M$ .

# تمارين محلولة ( ١٥ )

١ – **تعريف.**

لتكن $\Re_1, \Re_2$ فئتين و $F: \Re_1 \longrightarrow \Re_2, G: \Re_2 \longrightarrow \Re_1$ داليين موافقين للتغيير. نقول عن الدالي $G$ إنه دالي مرافق للدالي $F$ إذا وجد ايزومورفيزم دالي $\varphi: Hom_{\Re_2}(F) \longrightarrow Hom_{\Re_1}(G)$ .

لتكن $\Re_1, \Re_2$ فئتين و $F, F_1: \Re_1 \longrightarrow \Re_2, G, G_1: \Re_2 \longrightarrow \Re_1$ دوال موافقة للتغيير. وليكن $f: F \longrightarrow F_1$ مورفيزماً دالياً ولنفرض أن الدالي $G$ هو دالي مرافق للدالي $F$ وأن الدالي $G_1$ هو دالي مرافق للدالي $F_1$، عندئذ يوجد مورفيزم دالي وحيد $g: G_1 \longrightarrow G$ من أجله المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & Hom_{\Re_2}(F(A),B) & \xrightarrow{\varphi(A,B)} & Hom_{\Re_1}(A,G(B)) & \\ Hom_{\Re_2}(f(A),B) & \uparrow & & \uparrow & Hom_{\Re_1}(A,g(B)) \\ & Hom_{\Re_2}(F_1(A),B) & \xrightarrow[\varphi_1(A,B)]{} & Hom_{\Re_1}(A,G_1(B)) & \end{array}$$

تبديلي.

**الحل.**

بحسب التمهيدية (١٥–٣–١) فإنه توجد دوال موافقة للتغير

$$Hom_{\Re_2}(G): \Re_1^{op} \times \Re_2 \longrightarrow Set"s$$
$$Hom_{\Re_1}(F): \Re_1^{op} \times \Re_2 \longrightarrow Set"s$$

وأيضا حسب التمهيدية (١٥–٢–٢) فإنه توجد دوال موافقة للتغير

$$h_{G(B)}: \Re_1 \longrightarrow Set"s, h_{G_1(B)}: \Re_1 \longrightarrow Set"s$$

وبما أن الدالي $F$ مرافق للدالي $F_1$ وأن الدالي $G$ مرافق للدالي $G_1$ فإنه توجد ايزومورفيزمات دالية

$$\varphi_1 : Hom_{\Re_2}(F_1) \longrightarrow Hom_{\Re_1}(G_1) \text{ و } \varphi : Hom_{\Re_2}(F) \longrightarrow Hom_{\Re_1}(G)$$

لنعرف $\psi(B) : h_{G_1(B)} \longrightarrow h_{G(B)}$ بالشكل $\forall A \in Ob(\Re_1)$ فإن

$$\psi(B)(A) = \psi(A,B) \text{ و } \psi(A,B) = \varphi(A,B).h_B(f(A))[\varphi_1(A,B)]^{-1}$$

عندئذ من أجل أي مورفيزم $u : C \to A$ للفئة $\Re_1$ فإن

$$h_{G(B)}(u)\psi(A,B) = h_{G(B)}(u)\varphi(A,B)h_B(f(A))[\varphi_1(A,B)]^{-1} =$$
$$= \varphi(C,B)h_B(F(u))h_B(f(A))[\varphi_1(A,B)]^{-1} =$$
$$= \varphi(C,B)h_B(f(C))h_B(F_1(u))[\varphi_1(A,B)]^{-1} =$$
$$= \psi(C,B)\varphi_1(C,B)h_B(F_1(u))[\varphi_1(A,B)]^{-1} =$$
$$= \psi(C,B)h_{G_1(B)}(u)$$

ومنه حسب المبرهنة (١٥-٢-٤) يوجد مورفيزم وحيد $g(B) : G_1(B) \to G(B)$ يحقق أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & Hom_{\Re_2}(F(A),B) & \xrightarrow{\varphi(A,B)} & Hom_{\Re_1}(A,G(B)) & \\ Hom_{\Re_2}(f(A),B) & \uparrow & & \uparrow & Hom_{\Re_1}(A,g(B)) \\ & Hom_{\Re_2}(F_1(A),B) & \xrightarrow[\varphi_1(A,B)]{} & Hom_{\Re_1}(A,G_1(B)) & \end{array}$$

تبديلي.

لنبرهن على أن $g : G_1 \to G$ هو مورفيزم دالي. ليكن $u : B \to B_1$ مورفيزم للفئة $\Re_1$ عندئذ المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} & G(B) & \xrightarrow{G(u)} & G(B_1) & \\ g(B) & \uparrow & & \uparrow & g(B) \\ & G_1(B) & \xrightarrow[G_1(u)]{} & G_1(B_1) & \end{array}$$

تبديلي. وهذا يبين لنا أن $g : G_1 \to G$ مورفيزم دالي.

## تمـــاريـــن (١٥)

١- ليكن $B \in Ob(Set's)$ ولنعرف $F : Set's \longrightarrow Set's$ بالشكل التالي

$$\forall A \in Ob(Set's); F(A) = A \times B$$

أثبت أن $F$ هو دالي موافق للتغيير لفئة المجموعات $Set's$.

٢- ليكن $B \in Ob(Set's)$ ولنعرف $G : Set's \longrightarrow Set's$ بالشكل التالي

$$\forall C \in Ob(Set's); G(A) = Hom_{Set's}(B,C)$$

أثبت أن $G$ هو دالي موافق للتغيير لفئة المجموعات $Set's$.

٣-أثبت أن الدالي $G$ المعرف في (٢) هو دالي مرافق للدالي $F$ المعرف في (١).

٤- بالاعتماد على (١) و(٢) و(٣) أثبت أن

$$Hom_{Set's}(A \times B, C) \approx Hom_{Set's}(A, Hom_{Set's}(B,C))$$

( إنكليزي-عربي )

| | |
|---|---|
| *Abelain group* | زمرة تبديلية |
| *elementary* | زمرة أساسية |
| *finite group* | زمرة تبديلية منتهية |
| *free* | زمرة حرة |
| *Addition modulo* | الجمع بالمقاس |
| *Addition group of integers modulo-n* | جمع الأعداد الصحيحة بالمقاس-*n* |
| *Algebra* | الجبر |
| *of sets* | جبر المجموعات |
| *Algebraic* | جبري |
| *of structure* | بنية جبرية |
| *Ascending chain condition* | شرط انقطاع السلاسل |
| *Associates* | تجميع |
| *Associativity* | تجميعي |
| *Automorphism* | تماثل |
| *of group* | تماثل زمري |
| *inner* | تماثل داخلي |
| *Axioms* | موضوعات |
| *Bijective map* | تطبيق غامر |
| *Binary operation* | قانون تشكيل |
| *Cancellation* | اختصار |
| *law of groups* | قانون الاختصار في الزمرة |
| *Cartesian product of two sets* | الجداء الديكارتي لمجموعتين |

| English | Arabic |
| --- | --- |
| *Category* | فئة |
| *Cauchs Theorem* | مبرهنة كوشي |
| *Cayley digraph of a group* | جدول كايلي للزمرة |
| *Cayleys Theorem* | مبرهنة كايلي |
| *Center* | مركز |
| *of a group* | مركز الزمرة |
| *Centralizer* | ممركز |
| *of an element* | ممركز عنصر |
| *of a subgroup* | ممركز الزمرة الجزئية |
| *Characteristic subgroup* | زمرة جزئية متميزة |
| *Commutative operation* | عملية تبديلية |
| *Commutator subgroup* | مبادل الزمرة الجزئية |
| *Conjugacy class* | صف ترافق |
| *Conjugate* | ترافق |
| *element* | عنصر مترافق |
| *subgroup* | زمرة جزئية مترافقة |
| *complement to subgroup* | متمم الزمرة الجزئية |
| *Co- prime integers* | أعداد أولية فيما بينها |
| *Coset* | مرافق |
| *left* | مرافق يساري |
| *right* | مرافق يميني |
| *Cycle* | دور |
| *disjoint* | طول الدور |
| *-m* | دور طوله *m* |

| English | Arabic |
| --- | --- |
| *Cyclic* | دائري |
| *groups* | زمرة دوارة |
| *subgroup* | زمرة جزئية دوارة |
| *Dihedral groups* | زمرة ثنائية |
| *Direct product of groups* | الجداء المباشر للزمر |
| *external* | الجداء المباشر الخارجي للزمر |
| *Internal* | الجداء المباشر الداخلي للزمر |
| *Direct sum* | مجموع مباشر |
| *of groups* | المجموع المباشر لزمر |
| *Derived group* | مشتق الزمرة |
| *Division algorithm* | خوارزمية القسمة |
| *Divisor* | قاسم |
| *of zero* | قاسم للصفر |
| *Element(s)* | عنصر |
| *Algebraic* | عنصر جبري |
| *Conjugate* | عنصر مرافق |
| *fixed* | عنصر ثابت |
| *Elementary abelian group* | زمرة تبديلية أساسية |
| *identity* | عنصر وحدة(حيادي) |
| *inverse of* | مقلوب عنصر |
| *order of* | مرتبة عنصر |
| *Equivalence class* | صف تكافؤ |
| *Equivalence relation* | علاقة تكافؤ |
| *Extension of group* | تمديد للزمرة |

| | |
|---|---|
| *Fermat theorem* | مبرهنة فيرما |
| *Factor group* | زمرة الخارج |
| *Finitely generated group* | زمرة منتهية التوليد |
| *Finitely generated abelian group* | زمرة تبديلية منتهية التوليد |
| *First Isomorphism Theorem* | مبرهنة التماثل الأولى |
| *Frattini group* | زمرة فراتيني |
| *Function(s)* | تابع |
| *codomain* | مجموعة قيم(مستقر) تابع |
| *composition* | تركيب التوابع |
| *domain* | مجموعة تعريف(منطلق) تابع |
| *one-to-one* | تابع متباين |
| *onto* | تابع غامر |
| *Functor* | دالي |
| *Generator(s)* | مولد |
| *of a cyclic group* | مولد الزمرة الدوارة |
| *Greatest common divisor* | قاسم مشترك أعظم |
| *Group* | زمرة |
| *abelian* | زمرة تبديلية |
| *Automorphism* | تماثل للزمرة |
| *center of* | مركز الزمرة |
| *commutative* | زمرة تبديلية |
| *cyclic* | زمرة دوارة |
| *finite* | زمرة منتهية |
| *non-abelain* | زمرة غير تبديلية |

| | |
|---|---|
| *order of* | مرتبة الزمرة |
| *simple* | زمرة بسيطة |
| *solvable* | زمرة قابلة للحل |
| *symmetric* | زمرة متناظرة |
| *symmetry* | زمرة تناظرية |
| *of units* | حيادي الزمرة |
| *Homomorphism(s)* | تشاكل |
| *Fundamental Theorem of* | النظرية الأساسية للتشاكلات |
| *of a group* | تشاكل زمري |
| *kernel of* | نواة تشاكل |
| *Identity element* | عنصر وحدة |
| *Index of a subgroup* | دليل الزمرة الجزئية |
| *Index Theorem* | نظرية الدليل |
| *Isomorphism(s)* | تماثل |
| *first Theorem for groups* | نظرية التماثل الأولى |
| *of groups* | تماثل زمري |
| *second Theorem for groups* | نظرية التماثل الزمري الثانية |
| *third Theorem for groups* | نظرية التماثل الزمري الثالثة |
| *Kernel of a homomorphism* | نواة التشاكل |
| *Lagrangs Theorem* | نظرية لاغرانج |
| *Mapping* | تطبيق |
| *Matrix* | مصفوفة |
| *addition* | جمع المصفوفات |
| *determinant of* | معين مصفوفة |

| | |
|---|---|
| multiplication | جداء المصفوفات |
| Odd permutation | تبديل فردي |
| Operation | قانون تشكيل |
| associative | قانون تشكيل تجميعي |
| binary | قانون تشكيل داخلي |
| table for | جدول قانون التشكيل |
| Orbit of a point | مدار النقطة |
| Order | مرتبة |
| of an element | مرتبة عنصر |
| of a group | مرتبة الزمرة |
| p-group | p-زمرة |
| Relation | علاقة |
| equivalent | علاقة التكافؤ |
| Subgroup(s) | زمرة جزئية |
| characteristic | زمرة جزئية متميزة |
| commutator | مبادل زمرة جزئية |
| conjugate | زمرة جزئية مترافقة |
| cyclic | زمرة جزئية دوارة |
| definition | تعريف الزمرة الجزئية |
| finite test | اختبار الزمرة الجزئية المنتهية |
| index | دليل الزمرة الجزئية |
| nontrivial | زمرة جزئية غير تافهة |
| normal | زمرة جزئية ناظمية |
| proper | زمرة جزئية محتواة تماما |
| Sylow p- | p-زمرة جزئية سيلوفية |
| torsion | زمرة فتل جزئية |
| trivial | زمرة جزئية تافهة |
| Sylow p-subgroup | p-زمرة جزئية سيلوفية |
| Sylow Theorem | مبرهنة سيلوف |
| Well-defined function | تابع معرف جيدا |
| Zero | صفر |

# المــراجــع العــلميــة


1 – *Baer R. Nilpotent Characteristic Subgroups of Finite groups. Amer. J. Math.* 75(1953),633..

2 – *Bucur I.& Deleanu A. Introduction to the theory of Categories and Functors. Pur Appl.Math.V*19.(1968).

3 – *Burnside. W On the Theory of Groups of Finite order. Proc. London. Math. Soc* (2)7(1909),1 – 7.

4 – *Curtis C. W. & Reiner I. Representation Theory of finite Groups and Associative Algebra.-* (1962).

5 – *Cavior S. R.The Subgroups of the Dihedral Group. Math.Magzine* 48(1975);107.

6 – *Deborah L. Massari. The Propability of Generating a Cylic Group. Pi Mu Epsilon. J.* 7(1979);3 – 6.

7 – *Dieter J. On the Uniqueness of the Cyclic Group of Order n. Amer.Math.Mont.* 99(1992) : *p*.545 – 546.

8 – *Fralegh J. A First Course in Abstract Algebra. 4th ed. Addison-wesley,* 1989.

9 – *Gabriel P. & Zisman M. Calculus of Fractions and Homotopy Theory. Springer* 1967.

10 – *Gallain J. A. Contemporary Abstract Algebra.-third edition. D.C. Hath and Company.* 1994.

11 – *Gallian J. A. & Molton D. When is* $Z_n$ *the Only Group of Order n? Elem. Math.* 48(1993) : *p*.118 – 120.

12 – *Gallian J.A. & Rusin D. Factoring Groups of Integers Modulo n. Math. Magazine.* 53(1980);33 – 36.

13 – *Geoff Smith & Olga Tabachnikova. Topics in Group Theory. Springer* 2000.

14 – *Hall M. J. The Theory of Groups.- Macmillan. New York.* 1959.

15 – *Johnson D. L. Topic in the Theory of Group Presentations- London Math.Soc. Lect. Note Ser.-* 1980. – *V*.42.

16 – *John S. Rose. A Course on Group Theory. Cambridge University press* 1978.

17 – *Kaplansky I. Infinite Abelian Groups.- Michigan,* 1969.

18 – *Lang S. Algebra.-* 1965.

19 – *Macdonald I.D. The Theory of Groups.-Oxford Univ.* 1968.

20 – *Robinson D. J. Course in The Theory of Groups.-New York; Heidelberg; Berlin: Springer,* 1982.

21 – *Rotman J. J. The Theory of Groups: An Introduction, Boston: Allyn & Bacon* 1965.

22 – *Paley H. & Weichsel P. A First Course in Abstract Algebra.-New York: Holt & Winston,* 1966.

23 – *Scott W.R. Group Theory. Prentice-Hall,* 1964.

٢٤ – د. إلهام حمصي: الجبر ( الجزء الأول ). منشورات جامعة دمشق. ١٩٨٢.

٢٥ – د. عبد الواحد أبو حمدة. الجبر (٣). منشورات جامعة دمشق. ١٩٨٢.

٢٦ – د. عبد الواحد أبو حمدة. الجبر المجرد. منشورات جامعة دمشق. ١٩٩٥.